Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

2. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (31.10.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n}$

b. $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$

c. $\sum_{n\geq 0} (\cos n) z^n$

d. $\sum_{n\geq 1} \frac{n! z^n}{n^n}$

1. (Niveaulinien) [*4 Pkt*]

Zeichnen Sie die *Niveaulinien* von Real- und Imaginärteil der Funktion $z \mapsto z^3$, d.h. die Lösungen der Gleichungen

$$\mathrm{Re}\left(z^3\right) = C, \qquad \mathrm{Im}\left(z^3\right) = C,$$

für $C \in \mathbb{R}$.

2. (Potenzreihen) [*4 Pkt*]

Beweisen Sie: für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1 + 3z^2}{(1 - z^2)^3} = \sum_{n\geq 0} (n+1)(2n+1) z^{2n}$$

3. (Gleichmässige Konvergenz) [*4 Pkt*]

Beweisen Sie folgende Aussage: es sei $P(z) = \sum_k c_k z^k$ eine Potenzreihe mit $P(1) = 0$; dann konvergiert $P(z)$ gleichmässig auf jede kompakte Teilmenge der Scheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

4. (Analytische Funktionen) *[3 Pkt]*

Entscheiden Sie ob folgende Funktionen analytisch sind (begründen Sie Ihre Aussage!)

a. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\, x + iy \mapsto x^2 + y^2 - 2ixy$

b. $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\, x + iy \mapsto \frac{ix+y}{x^2+y^2}$

c. $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\, z \mapsto z^2|z|$

5. (Besselsche Funktionen) *[4 Pkt]*

Es sei $p = 1, 2, 3, \ldots$ und sei

$$J_p(z) = \frac{(z/2)^p}{0!p} - \frac{(z/2)^{p+2}}{1!(p+1)!} + \frac{(z/2)^{p+4}}{2!(p+2)!} - \ldots$$

die Besselsche Funktion der Ordnung p. Zeigen Sie:

a. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $J_p(z)$ ist ∞.

b. Es gilt für $z \neq 0$:

$$\frac{d^2}{dz^2} J_p(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} J_p(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) J_p(z) = 0.$$