

12. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker“

Abgabe Montag (23.1.2012) in den Uebungen

Präsenzaufgabe. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + y = \tan(t), \quad -\pi/2 < t < \pi/2,$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

1. (Reguläres Sturm-Liouville Problem)

[20 Pkt]

Betrachten Sie das Sturm-Liouville Problem

$$L\psi(x) = -\psi''(x) = \lambda\psi(x), \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) + \psi'(1) = 0$$

über dem Intervall $[0, 1]$.

- Zeigen Sie, dass $\langle \psi, L\psi \rangle > 0$ gilt (für alle Funktionen $\psi \neq 0$, welche die Randbedingungen erfüllen) und folgern Sie daraus, dass alle Eigenwerte λ positiv sein müssen.
- Zeigen Sie, dass die Eigenwerte durch $\lambda_k = \mu_k^2$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) gegeben sind, wobei μ_k die k -te Lösung der Gleichung $\mu + \tan(\mu) = 0$ ist. Machen Sie sich graphisch klar, dass

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < \mu_k < k\pi$$

gilt. (Für grosses k ist $\mu_k \approx k\pi - \frac{\pi}{2}$.)

- Bestimmen Sie die Eigenfunktion ψ_k zu λ_k und benutzen Sie

$$\int_0^1 \sin(\mu x) \sin(\mu' x) dx = \frac{\mu' \sin(\mu) \cos(\mu') - \mu \cos(\mu) \sin(\mu')}{\mu'^2 - \mu^2}$$

um die Orthogonalität der Eigenfunktionen zu überprüfen. Bestimmen Sie letztlich die Normierung $\langle \psi_k, \psi_k \rangle$ als Ausdruck in μ_k .

- Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1]$ in einer Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \psi_k(x)$ bezüglich des Orthogonalsystem der Eigenfunktionen.

Bitte wenden!

Bonus-Aufgaben

2. (Green'sche Funktion)

[5 Pkt]

Berechnen Sie die Green'sche Funktion für den Sturm-Liouville Operator

$$L\psi(x) = -\psi''(x) = 0$$

mit den Randbedingungen $\psi(0) = 0, \psi(1) = 0$.

3. (Variation der Konstanten)

[5 Pkt]

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$3y'' + 4y' + y = (\sin t)e^{-t}; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

4. (Singuläres Sturm-Liouville Problem)

[20 Pkt]

Betrachten Sie das singuläre Sturm-Liouville Problem

$$\begin{cases} Lf(x) = -f''(x) + V(x)f(x) = \lambda f(x), & [0, \infty) \\ \sin \alpha f(0) - \cos \alpha f'(0) = 0. \end{cases}$$

Dabei ist $V(x) = 0$ für $x < 10$ und $V(x) = 36$ für $x > 10$.

Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenwerte und Eigenfunktionen, und das zugehörige Spektralmaß.