Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

11. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (9.1.2012) in den Uebungen

---

1. (Laurentreihen) [*6 Pkt*]

Berechnen Sie die Fourierreihe von

$$f(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi) - 2}.$$

Schreiben Sie dazu $f(\phi) = F(e^{i\phi})$ mit einer Funktion F, die analytisch in einer Umgebung des Einheitskreises ist; entwickeln Sie dann $F(z)$ in eine auf dem Einheitskreis konvergente Laurentreihe.

2. (Besselgleichung) [*8 Pkt*]

Eine für die Anwendungen wichtige Differentialgleichung ist die sogenannte *Besselgleichung*

$$x^2 J''(x) + xJ'(x) + (x^2 - n^2)J(x) = 0,$$

Hier ist $n \in \mathbb{R}$ ein gegebenes Parameter.

a) Geben Sie den Sturm-Liouville Operator L für die Besselgleichung explizit an.

b) Überzeugen Sie sich durch explizites nachrechnen, dass L selbstadjungiert ist. (Nehmen Sie dabei $x \in [0, 1]$ und Dirichlet Randbedingungen an.)

c) Zeigen Sie unter Annahme dass n ganzzahlig ist, dass

$$J(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{4^k k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

die Besselgleichung löst.

Hinweis. Es sei $J(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ durch Potenzreihenansatz. Bestimmen Sie dann durch Koeffizientenvergleich den Wert der c_k. Wählen Sie dabei $c_0 = 1$.

d) Welcher ist der Konvergenzradius der in Teilaufgabe *c*) erhaltenen Reihe?

Bitte wenden!

3. (Sturm-Liouville Eigenwertprobleme) *[6 Pkt]*

Wir betrachten Wellen in einem ebenen Ringbereich $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ mit $0 < a < b$, d.h. wir suchen Lösungen des Randwertproblems

$$(\star) \qquad \begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, \\ u(x, y, t) = 0 \text{ für } x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}$$

Dies kann man als eine am Rand eingespannte Ringmembran interpretieren oder als eine elektromagnetische Schwingung in einem langen Doppelzylinder. Aus Symmetriegründen ist es naheliegend, das obige Problem in Polarkoordinaten (ρ, ϕ) anzugehen. Dabei ist $\rho \in (a, b)$ der Radius, und $\phi \in [0, 2\pi]$ der Winkel.

a) Schreiben Sie $u = u(\rho, \phi, t) = R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$ und leiten Sie das zu $(\star)$ entsprechende System entkoppelter Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \ddot{T} + \omega^2 T = 0, \\ \Phi'' + n^2 \Phi = 0, \\ \rho^2 R'' + \rho R' + \left(\rho^2 \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\right) R = 0. \qquad \text{(verallgemeinerte Besselgleichung)} \end{cases}$$

Hinweis: wenden Sie den Laplaceoperator in Polarkoordinaten auf $R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$ und separieren Sie die Variablen!

b) In welchem Bereich soll n liegen? Welche physikalische Bedeutung hat diese Zahl?

c) Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den *rotationssymmetrischen* Fall $n = 0$. Es gilt also $u = R(\rho)T(t)$, und da $0 < a \leq \rho$ können wir die Besselgleichung aus Teilaufgabe *a)* durch ρ teilen und erhalten somit

$$\begin{cases} \ddot{T} + \omega^2 T = 0, \\ (\rho R')' + \omega^2 \frac{\rho}{c^2} R = 0. \end{cases}$$

Die zweite Differentialgleichung ist also ein reguläres Sturm-Liouville Problem: wie lautet seine Normalform?

Wir wissen aus der Vorlesung dass ein solches Sturm-Liouville Problem abzählbar viele Eigenwerte $-\infty < \omega_0 < \omega_1 < \dots$ besitzt: wenn wir mit $\phi_i(\rho), i = 0, 1 \dots$ die zugehörigen Eigenfunktionen bezeichnen, erhalten wir also für das Ringmembranproblem im rotationssymmetrischen Fall folgende Lösungen:

$$u(\rho, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\rho) \left(a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\right).$$

Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ ergeben sich als

$$u(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(\rho), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_k \phi_k(\rho).$$

Drücken sie Koeffizienten a_k und b_k durch $u(\rho, 0), u_t(\rho, 0)$ und die Eigenwerten ω_k aus!