Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

1. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (24.10.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe.

a. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\frac{(2+i)(3+2i)}{1-i}$ und $(1-2i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

b. Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n}$ auf Konvergenz, bzw. absolute Konvergenz.

c. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{2n}$.

1. (Komplexe Konjugation) [*2 Pkt*]

Beweisen Sie: für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

1) $(a \cdot b)^\star = a^\star \cdot b^\star$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^\star = \frac{a^\star}{b^\star}$ $(b \neq 0)$.

2. (Eigenschaften von $\mathbb{C}$) [*4 Pkt*]

Beweisen Sie:

a. die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bildet bezüglich Addition und Multiplikation einen Körper.

b. der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist topologisch abgeschlossen, d.h., jede Cauchy-Folge $z_n \in \mathbb{C}$ besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{C}$.

3. (Potenzen von komplexen Zahlen) [*4 Pkt*]

a. Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: $|z|^n = |z^n|$ (*ohne* auf die Polardarstellung von z zurückzugreifen).

b. Lösen Sie die Gleichung $z^4 = 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

4. (Konvergenz von Reihen) *[3 Pkt]*

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz, bzw. absolute Konvergenz:

a. $\sum_{n\geq 1} \frac{(2+i)^n}{(1+i)^{2n}}$

b. $\sum_{n\geq 1} \left(\left(z-n-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Berechnen Sie den Limes.

5. (Konvergenzradius) *[5 Pkt]*

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $\sum_{n\geq 0} n! z^n$
2. $\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{3\cdot(k+2)!}$
3. $\sum_{k\geq 1} \frac{z^{2k}2^k}{(1+1/k)^k}$
4. $\sum_{k\geq 1} k^k z^k$