Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

Mathematik III für Physiker

Probeklausur (keine Abgabe)

---

1. (Potenzreihen)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} z^n, \alpha \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z/n)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n^2} z^n, \alpha \in \mathbb{C}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$

2. (Cauchy-Riemann)
Sei $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass $f'(z)$ existiert. Dabei ist

a) $f(z) = x^2 + iy^2$

b) $f(z) = z\mathfrak{Re}(z)$

3. (Kurvenintegrale)
Berechnen Sie

a) $\int_{\gamma} z dz$

b) $\int_{\gamma} z^{\star} dz$

wobei γ die Strecke $0 \to (1 + i) \to 2$ ist.

4. (Kurvenintegrale)
Sei

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{a}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} dz.$$

Dabei ist $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Berechnen Sie $f(a)$ für $0 < |a| < 1$.

5. (Maximumsprinzip) [*Pkt*]
Bestimmen Sie $\sup\{|\sin(z)| : \mathfrak{Re}(z) \in [0, 2\pi], \mathfrak{Im}(z) \in [0, 2\pi]\}$.

Bitte wenden!

6. (Charakterisierung von Singularitäten)
Man finde die hebbaren Singularitäten, die Pole (mit Angabe der Ordnung) und die wesentlichen Singularitäten der folgenden Funktionen:

a)
$$\frac{1}{e^z - e}$$

b)
$$\frac{1-\cos(z)}{\sin^2(z)}$$

7. (Integrale)
Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(x)}{\alpha + \cos(x)} dx,$$
wobe $\alpha > 1$.

8. (Residuenkalkül)
Berechnen Sie

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx.$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, \quad a, b > 0.$$

9. (Laurentreihen)
Sei $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ Bestimmen Sie die Laurentreihe von f gültig auf

a) $0 < |z - i| < 2$

b) $0 < |z + i| < 2$

10. (Sturm-Liouville)
Betrachten Sie das Sturm-Liouville Problem
$$\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ y(0) = 0, \ y(L)\cos(\beta) = y'(L)\sin(\beta) \end{cases}$$
Dabei ist $\beta \in (0, \pi)$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$ für nicht-trivialen Lösungen $y \neq 0$.

b) Geben Sie eine Bedingung auf β so, dass der *kleinste* Eigenwert negativ ist.

c) Welches β liefert den kleinsten Eigenwert?