MfP2: Übersicht wichtiger Rechenregeln

Satz von der monotonen Konvergenz (SvdmK). *Sei $f_n : A \to [0,\infty)$ eine Folge messbarer punktweise monton wachsender und punktweise konvergenter Funktionen (d.h., $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in A$). Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Satz von der dominierten Konvergenz (SvddK). *Sei $f_n : A \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer punktweise konvergenter Funktionen, die von einer integrierbaren Funktion $g : A \to [0,\infty)$ dominiert wird (d.h., $\int_A g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in A$). Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Leibnizregel. *Sei $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass*
(1) $f(\cdot,t)$ für jedes $t \in I$ integrierbar ist,
(2) $f(x,\cdot)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und
(3) $\partial f(\cdot,t)/\partial t$ von einer integrierbaren Funktion dominiert wird.
Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bemerkung. *Für Eigenschaft (1) muss gezeigt werden, dass $\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|\,\mathrm{d}x < \infty$ gilt. Eigenschaft (2) bedeutet, dass $\partial f(x,t)/\partial t$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $t \in I$ existiert. Für (3) ist wie im SvddK eine Funktion $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ zu finden, sodass $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ und $|\partial f(x,t)/\partial t| \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in I$ gilt.*

Fubini. *Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ integrierbar (z.B. $\int_Y \int_X |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$) oder sei die Funktion f messbar und nicht-negativ. Dann gilt*

$$\int_Y \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

Transformationssatz. *Sei $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g : U \to V$ ein Diffeomorphismus offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_V f(y)\,\mathrm{d}y = \int_U f(g(x))\,|\det(\mathrm{D}g(x))|\,\mathrm{d}x\,.$$

Beispiel (Transformation in Kugel- bzw. Kegelkoordinaten).

$$\begin{aligned} g(r,\theta,\varphi) &= \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \det(\mathrm{D}g(r,\theta,\varphi)) = r^2\sin(\theta) \\ g(r,\varphi) &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \det(\mathrm{D}g(r,\varphi)) = r \end{aligned}$$

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren. *Sei V ein Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ versehen ist. Sind dann $v_1,\ldots,v_n$ linear unabhängige Vektoren aus V, so sind die Vektoren $\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n$ mit*

$$\tilde{v}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \tilde{v}_i, v_k\rangle}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i\rangle}\tilde{v}_i$$

wieder linear unabhängig und stehen orthogonal aufeinander (d.h., es gilt $\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j\rangle = 0$ für $i \neq j$).

Integration von Differentialformen. *Für eine k-Form ω im $\mathbb{R}^n$ und ein k-dimensionales Objekt M im $\mathbb{R}^n$, das durch $g : I_1 \times \cdots \times I_k \to \mathbb{R}^n$ parametrisiert ist, gilt*

$$\int_M \omega := \int_{I_k} \cdots \int_{I_1} \omega\,(g(t))\,(\partial_1 g(t), \ldots, \partial_k g(t))\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k\,.$$

Speziell ist für $n = 3$ und $k = 2$

$$\int_M \omega = \int_{I_2} \int_{I_1} \langle \omega(g(t)), \partial_1 g(t) \times \partial_2 g(t) \rangle\,\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2\,.$$

Für die Integration über Kurven M im $\mathbb{R}^n$, d.h. für allgemeines n und $k = 1$ gilt

$$\int_M \omega = \int_{I_1} \langle \omega(g(t)), g'(t) \rangle\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Integration von n-Formen $\omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ reduziert sich wegen $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \equiv \det$ auf die gewöhnliche Integration der Funktion f über das orientierte Objekt M:

$$\int_M \omega = \int_{I_n} \cdots \int_{I_1} f(g(t)) \det(\mathrm{D}g(t)) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k$$

Satz von Stokes. *Sei ω eine $(k-1)$-Form im $\mathbb{R}^n$ und M ein k-dimensionales Objekt im $\mathbb{R}^n$, das durch $g : I_1 \times \cdots \times I_k \to \mathbb{R}^n$ parametrisiert ist. Ferner sei ∂M der durch die Einschränkung von g parametrisierte Rand von M. Dann gilt*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega\,.$$

Satz von Stokes für Kurven. *Sei $\omega = \mathrm{d}f$ eine exakte 1-Form im $\mathbb{R}^n$ und γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$, die durch $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ parametrisiert ist. Dann gilt*

$$\int_\gamma \omega = f(g(b)) - f(g(a))\,.$$

Volumenberechnung. *Das Volumen eines n-dimensionalen Objekts M im $\mathbb{R}^n$ ist*

$$\mathrm{vol}_n(M) = \int_M \mathrm{d}x\,.$$

Das Volumen eines k-dimensionalen Objektes M, das durch $g : I_1 \times \cdots \times I_k \to \mathbb{R}^n$ parametrisiert ist, berechnet sich als

$$\mathrm{vol}_k(M) = \int_{I_k} \cdots \int_{I_1} \|\partial_1 g(t) \wedge \cdots \wedge \partial_k g(t)\|\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k\,.$$

Für $k = 1$ erhält man als Spezialfall die Bogenlänge $\ell(M) = \mathrm{vol}_1(M) = \int_{I_1} \|g'(t)\|\,\mathrm{d}t$ der Kurve M. Für $k = 2$ und $n = 3$ ist $\|\partial_1 g \wedge \partial_2 g\| = \|\partial_1 g \times \partial_2 g\|$. Allgemein gilt die Gleichung $\|\partial_1 g \wedge \cdots \wedge \partial_k g\| = \sqrt{\det(A_g)}$ mit $A_g := (\langle \partial_i g, \partial_j g \rangle)_{1 \le i,j \le k}$.

Fourierreihen. *Die Funktionen $x \mapsto e^{\frac{2\pi}{T} nix}$, $n \in \mathbb{Z}$, bilden eine Orthonormalbasis des Vektorraums der quadratintegrierbaren komplexwertigen T-periodischen Funktionen bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$. Für jede T-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ haben wir die Darstellungen*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi}{T} nix} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)\,,$$

wobei $c_n = \langle f, e^{\frac{2\pi}{T} ni\cdot} \rangle$ sowie $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$ ist. Explizit gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi}{T} nix} \mathrm{d}x\,, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \mathrm{d}x\,, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$