Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

9. Übungsblatt

Ausgabe: 31.05.2011
Abgabe: 21.06.2011

Präsenzaufgabe 1
Seien $\alpha = xdx - ydy$, $\beta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz$ und $\gamma = zdy$ Differentialformen im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie ${}^*\alpha, {}^*\beta, {}^*\gamma$ und ${}^*(\alpha \wedge \beta)$.

Präsenzaufgabe 2
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge, und $\mathbf{f} : K \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie für $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$, $d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$ und $\omega = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$, dass div $\mathbf{f} = {}^* d^*\omega$.

Präsenzaufgabe 3
Sei $M = \{(r, \theta, z) : \ 1 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_M z(x^2 + y^2) dx \wedge dy \wedge dz$$

Hinweis. Benutzen Sie die folgende Koordinatentransformation: $\Psi(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \sin\theta, z)$, wobei $r \in [1, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$.

1. Aufgabe **(5 Punkte)**
Sei $\omega = -y^2 dx + x^2 dy$ eine Differentialform im $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie ${}^*\omega$ und ${}^*d^*d\omega$.

(b) Wiederholen Sie diese Berechnung, wenn ω eine Differentialform im $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Wiederholen Sie diese Berechnung, wenn ω eine Differentialform im $\mathbb{R}^4$ ist.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**
Berechnen Sie das Volumen der vier-dimensionalen Sphäre, die durch die folgende Parametrisierung gegeben ist:

$$g(\theta, \phi, \eta) = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\phi \cos\eta \\ \sin\theta \sin\phi \sin\eta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix},$$

wobei $\eta \in [0, 2\pi)$, $\theta, \phi \in [0, \pi]$.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei M das Gebiet im $\mathbb{R}^3_+$, welches durch die Kugeln $x^2+y^2+z^2=1$ und $x^2+y^2+z^2=4$ beschränkt ist. Berechnen Sie

$$\int_M dx \wedge dy \wedge dz$$

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei D die Würfel $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ und τ eine Differential-2-Form im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie dass

$$\int_D d\tau = \int_{\partial D} \tau$$

Gesamt: 20 Punkte