Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

7. Übungsblatt

Ausgabe: 19.05.2011
Abgabe: 02.06.2011

Präsenzaufgabe 1
Berechnen Sie:

(a) $(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

(b) $(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

Präsenzaufgabe 2
Berechnen Sie aus den 1-Formen $\omega = xdx + ydy$ und $\eta = zydx + xzdy + xydz$ die 2-Form $\omega \wedge \eta$.

Präsenzaufgabe 3
Ein Kegel ist das Bild der Menge $(0, 1] \times [0, 2\pi]$ unter der Abbildung

$$g(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, r).$$

Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels.

1. Aufgabe **(2 Punkte)**
Bestimmen Sie Vektoren, die zu den angebenen Vektoren orthonormal sind

(a) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ im $\mathbb{R}^3$,

(b) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ im $\mathbb{R}^3$.

2. Aufgabe **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass für die Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ und $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ gilt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Aufgabe **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass sich im 3-Dimensionalen die Anwendung einer 2-Form $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ auf zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ wie folgt darstellen lässt:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{u}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle.$$

4. Aufgabe **(6 Punkte)**

Berechen Sie $\omega \wedge \eta$:

(a) $\omega = 2xdx + ydy$ und $\eta = x^3dx + y^2dy$,

(b) $\omega = xdx - ydy$ und $\eta = ydx + xdy$,

(c) $\omega = e^{xyz}(dx \wedge dy)$ und $\eta = e^{-xyz}dz$.

5. Aufgabe **(4 Punkte)**

Ein Helikoid ist das Bild der Menge $[-1, 1] \times [0, 2\pi]$ unter der Abbildung

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

Berechnen Sie die Oberfläche des Helikoids.

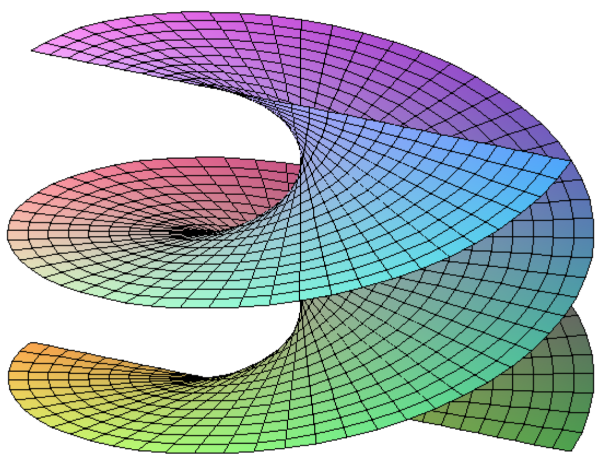

Abbildung 1: Helikoid.

Gesamt: 20 Punkte