Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

universitätbonn iam

6. Übungsblatt

Ausgabe: 12.05.2011
Abgabe: 26.05.2011

Präsenzaufgabe 1
Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialformen exakt sind, und berechnen Sie deren Integrale längs des Kreises und der Parabel mit den Parametrisierungen aus der 3. Aufgabe von Blatt 5:

(a) $\omega = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$

(b) $\omega = y^2dx + 2xydy$

(c) $\omega = (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy$

Präsenzaufgabe 2
Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 = x_1^2 + x_2^2,\ 0 < x_3 \leq 1\}$ ein Kegel im $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Parametrisierung für den Kegel.

1. Aufgabe **(6 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialformen exakt sind, und berechnen Sie deren Integrale längs des rollenden Kreises (siehe 3. Aufgabe, Blatt 5) und der Kurve, die durch $g(t) = (4\cos(\frac{t}{3}) - \cos(\frac{4t}{3}), 4\sin(\frac{t}{3}) - \sin(\frac{4t}{3}))$ für $t \in [0, 6\pi]$ parametrisiert wird:

(a) $\omega = (x + 2y)dx + (2x + y)dy$

(b) $\omega = (-4\sin x \sin(3y)\cos x)dx + (3\cos(3y)\cos(2x))dy$

(c) $\omega = (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$

2. Aufgabe **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Diffenrentialform $\omega = ydx + 2xdy$ nicht exakt ist.

Hinweis: Benutzen Sie dazu Theorem 2.1 aus der Vorlesung und den Kreis (siehe 3. Aufgabe, Blatt 5), um einen Widerspruch herzuleiten.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**
Sei γ eine Parametrisierung des Quadrates (im $\mathbb{R}^2$) mit Seite eins, welche gegen Uhrzeigersinn verläuft. Berechnen Sie $\int_\gamma \omega$ für die Differentialform $\omega = x^2dx + xydy$.

Hinweis: Sei γ eine Kurve, die sich durch eine endliche Summe von Kurven $\gamma_i, i = 1, \ldots, n$ darstellen lässt, dh. $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$. Dann gilt für jede Differentialform ω:

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ ein Hyperboloid im $\mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Parametrisierung für das Hyperboloid.

Gesamt: 20 Punkte