Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

5. Übungsblatt

Ausgabe: 05.05.2011
Abgabe: 19.05.2011

Präsenzaufgabe 1

(a) Berechnen Sie $\dot{g}(t)$ und $\dot{g}(0)$ für

(i) $g(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t, (2t - t^2))$

(ii) $g(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$

(iii) $g(t) = (t^2, t^2 - 4t, 0)$

(b) Berechnen Sie die Tangente der Kurven die durch obige Parametrisierungen gegeben sind für $t = 0$.

(c) Berechnen Sie die Länge der Kurven die durch folgende Parametrisierungen gegeben sind:

(i) $g(t) = (2t, t^2, \log t), t \in [1, 2]$

(ii) $g(t) = (t, t \sin t, t \cos t), t \in [0, \pi]$

Präsenzaufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass $g(t) = (t^2, t^3)$ und $h(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$ für $t \in [0, 1]$ äquivalent sind.

(b) Sei γ die Kurve, die durch g paramtrisiert wird. Sei ω eine Differentialform gegeben durch $\omega(\mathbf{x}) = ydx + (x^3 + y)dy$. Berechnen Sie $\int_\gamma \omega$.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Parametrisierungen von Kurven und berechnen Sie die Tangenten an den jeweils angegebenen Stellen

(a) $g(t) = (\cos t, \sin 2t) \quad t = 0$

(b) $g(t) = (t \sin t, t \cos t, \sqrt{3}t), \quad t = 0$

(c) $g(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}) \quad t = 0$

(d) $g(t) = (t, t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}) \quad t = 9$

2. Aufgabe **(4 Punkte)**

Berechnen Sie eine Parametrisierung g, für die gilt $g(0) = (0, -5, 1)$ sowie

$$\dot{g}(t) = \left(t, e^t, t^2\right).$$

3. Aufgabe **(6 Punkte)**

Berechnen Sie die Längen der Kurven die durch die folgenden Parametrisierungen gegeben sind:

(a) $g(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (Kreis)

(b) $g(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$ (Parabel)

Hinweis. Substituieren Sie $t = \frac{1}{2}\sinh(x)$.

(c) $g(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (Rollender Kreis)
Hinweis. Benutzen Sie die Formel für $\cos(x + y)$.

(d) $g(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 4\pi]$ (Helix)

4. Aufgabe **(6 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass $h(t) = (\sin(t), \cos(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $g(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$ für $t \in [0, 1]$ äquivalent sind.

(b) Seien γ_1 und γ_2 zwei Kurven gegeben durch die Paramtetrisierungen $h(t) = (\cos(t), \sin(t))$ bzw. $m(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ $t \in [0, 2\pi]$. Betrachten Sie ω gegeben durch $\omega(\mathbf{x}) = ydx$ und zeigen Sie dass

$$\int_0^{2\pi} (\omega(h(t)), \dot{h}(t))dt \neq \int_0^{2\pi} (\omega(m(t)), \dot{m}(t))dt.$$

Gesamt: 20 Punkte