Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

3. Übungsblatt

Ausgabe: 21.04.2011
Abgabe: 05.05.2011

Präsenzaufgabe 1
Benutzen the "transforation rule" die folgenden Integralen zu berechnen.

(a) $\int_0^\pi x^3 \cos x^4 dx$,

(b) $\int_0^\pi \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(c) $\int_2^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

Präsenzaufgabe 2
Zeigen Sie, dass für ur $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u du, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Aufgabe **(5 Punkte)**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+5x+6} dx$

(b) $\int_0^R x^2 e^{-ax} dx$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(d) $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert in (b) der Grenzwert $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx$?

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

(a) Zeigen dass gilt
$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$
Hinweis: Substitutieren Sie $u = \pi - x$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a)
$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Identität $\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{11}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx \leq \frac{11}{24}\sqrt{\frac{4}{3}};$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Identität $1+x^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4)$ für $a > 0$:

$$\frac{1}{1+a^6}\left(a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}\right) \leq \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} \leq 1 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5}.$$

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Leibniz Regel, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\exp(-x)dx = (n-1)!.$$

Hinweis: Sie dürfen die 4. Aufgabe vom 1. Blatt (Teilaufgabe (a)) benutzen.

(b) Sei $I = [0,1]$, $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,t) = \frac{\sin(\frac{t}{x})}{x}\mathbf{1}_{x\in[0,1]}$. Zeigen Sie, dass die Leibniz Regel nicht anwendbar ist.

Gesamt: 20 Punkte