Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

2. Übungsblatt

Ausgabe: 14.04.2011
Abgabe: 28.04.2011

Präsenzaufgabe 1
Die Dirac Delta Funktion ist deniert durch

$$\delta(x) = 0, x \neq 0,$$
$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0),$$

für alle stetigen Funktionen f , die kompakten Träger besitzen.
Zeigen Sie, dass die gegebenen Folgen gegen die Dirac Funktion Konvergieren:

(a) $\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2} \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases}$

(b) $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \quad x \geq 0.$
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Gamma-Funktion aus Haussaufgabe 4 such für $0 < k < 1$ definiert ist und dass gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$..

Präsenzaufgabe 2
Gegeben seien die folgenden Matrizen $A_i \in M(2, R)$ für i = 1, . . . , 6:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Für $i = 1, \ldots, 6$, bestimmen Sie die Eigenwerte von A_i.

Präsenzaufgabe 3 (Legendre Polynome)
Sei μ ein Mass, definiert durch $\mu(dx) = dx$. Sei $L^2(\mu)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Benutzen Sie die Polynome $1, x, \ldots, x^n$ im Gram-Schmidt Verfahren um die ersten 4 Orthonormalpolynome $P_1, \ldots, P_n$ zu berechen.

Präsenzaufgabe 4 (Determinanten und Gram-Schmidt) Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhänging. Wir wenden auf diese das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an und erhalten $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass gilt: $det(v_1, v_2, v_3) = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$.

1. Aufgabe **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die folgende Matrix den Eigenwert 0 besitzt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 & -6 \\ 0 & -10 & -11 & -10 \\ 0 & 10 & 11 & 10 \\ 1 & -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes kann man die Determinante einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einträgen $b_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ wie folgt berechnen:

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (1)^{i+j} b_{ij} \det B_{ij}.$$

Dabei ist $B_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus B durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

2. Aufgabe(Satz von der dominierten Konvergenz) **(4 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$, $x \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

(b) Betrachten Sie andererseits die Funktionenfolge $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x)$, $x \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Begründen Sie, wieso der Satz von der dominierten Konvergenz nicht anwendbar ist.

3. Aufgabe(Laguerre Polynome) **(6 Punkte)**

Sei μ ein Mass auf $(0, \infty)$, definiert durch $\mu(dx) = e^{-x}dx$. Sei $L^2(\mu)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)\mu(dx).$$

Benutzen Sie die Polynome $1, x, \ldots, x^n$ im Gram-Schmidt Verfahren um die Polynome $P_0(x), \ldots, P_3(x)$ zu bestimmen die orthogonal bezüglich des gegebenen Skalarproduktes sind.

4. Aufgabe(Hermite Polynome) **(6 Punkte)**

Sei μ ein Mass auf $\mathbb{R}$, definiert durch $\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$. Sei $L^2(\mu)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\mu(dx).$$

Zeigen Sie, dass die Hermite-Polynome

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bezüglich des Skalarprodukts orthogonal sind.

Hinweis. Benutzen Sie die folgenden Gleichungen

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = H_{n-1}(x),$$

und

$$(n+1)H_{n+1}(x) - xH_n(x) + H_{n-1}(x) = 0, \text{ für } n \geq 1.$$

Gesamt: 20 Punkte