Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

12. Übungsblatt

Ausgabe: 30.06.2011
Abgabe:

1. Aufgabe

Berechnen Sie $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Hinweis. Betrachten Sie $\int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-y^2(1+x^2)} dy\, dx$ mit der Substitution $t = xy$ und benutzen Sie den Satz von Fubini-Tonelli.

2. Aufgabe

Betrachten Sie den Raum $\mathbb{R}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ fest ist. Sei $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

3. Aufgabe

Sei $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, t) = \frac{x^t - 1}{\log x}$. Zeigen Sie, dass die Leibniz-Regel anwendbar ist und bestimmen Sie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x} dx \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

4. Aufgabe

Welche der folgenden 1-Differentialformen ist exakt und welche nicht?

$$\begin{aligned} \omega &= (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)dx + (x^2 z - 4xy)dy + (x^2 y + 2xz - 2)dz \\ \omega &= (4xy - 3x^2 z^2)dx + (6z + 2x^2)dy + (6y^2 z - 2x^3)dz \end{aligned}$$

Hinweis. $g(t) = (5, \cos t, \sin t)$, für $t \in [0, 2\pi]$, ist eine Parametrisierung einer geschlossenen Kurve im $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe

Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \log\left(1 + \frac{1}{n} f(x)\right) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Hinweis. Benutzen Sie die Taylorreihenentwicklung des Logarithmus.

6. Aufgabe

Berechnen die folgenden Integrale:

(a) $\int_S \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$, wobei $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(b) $\int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$, wobei $S = \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$ mit $0 < a < b$.

7. Aufgabe
Berechnen Sie $d\omega$ für die folgenden Differentialformen:

(a) $\omega = (x^2 + y^2)dy \wedge dz$ im $\mathbb{R}^3$,

(b) $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)dz$ im $\mathbb{R}^3$,

(c) $\omega = \frac{-x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ im $\mathbb{R}^2$.

8. Aufgabe
Berechen Sie $\omega \wedge \eta$:

(a) $\omega = xdx + ydy + zdz$ und $\eta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$

(b) $\omega = xydy \wedge dz + x^2 dx \wedge dy$ und $\eta = dx + dz$.

9. Aufgabe
Sei γ die Kurve, die durch g parametrisiert wird. Sei ω eine Differentialform gegeben durch $\omega(x) = xdx + ydy + zdz$. Berechnen Sie $\int_\gamma \omega$ für die folgenden Parametrisierungen:

(a) $g(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $g(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$ $t \in [-1, 2]$

10. Aufgabe
Sei $M = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1,\ y \geq 0\}$, sowie $d\omega = -3x^2 dx \wedge dz - 2dx \wedge dy$. Benutzen Sie den Satz von Stokes um $\int_M d\omega$ zu berechnen.

11. Aufgabe
Gegeben seien die folgenden periodischen Funktionen:

(a) $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2, \end{cases}$, $f(x + 4) = f(x)$

(b) $f(x) = x, \quad -1 \leq x < 1$, $f(x + 2) = f(x)$

(c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \leq x < 0 \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$, $f(x + 4) = f(x)$

Berechnen sie deren Fourier-Reihen (in der $\sin$, $\cos$ Darstellung).

12. Aufgabe(Laplace Gleichung)
Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t), \quad 0 < x < \pi, 0 < t < 1 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, 0 < t < 1 \\ u(x,0) &= 1 \\ u(x,1) &= -1 \end{aligned}$$