Institut für Angewandte Mathematik
Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou / A. Svejda

10. Übungsblatt

Ausgabe: 09.06.2011
Abgabe: 23.06.2011

Präsenzaufgabe 1
Sei $\omega = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ eine Differentialform und S die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Benutzen Sie den Satz von Gauss, um das Integral $\int_{\partial S} \omega$ zu berechnen.

Präsenzaufgabe 2
Seien $S_1 = \{(x,y,z)|x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ und $S_2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+(z-1)^2 = 1, z \geq 1\}$. Berechnen Sie für die Differentialform

$$\omega = (zx + z^2 y + x)dx + (z^3 yx + y)dy + (z^4 x^2)dz$$

das Integral $\int_S d\omega$, wobei $S = S_1 \cup S_2$.

Präsenzaufgabe 3
Sei $\ell^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}$, sowie $d(x,y) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n - y_n)^2}$, für $x, y \in \ell^2$. Zeigen Sie, dass (ℓ^2, d) ein metrischer Raum ist.

1. Aufgabe **(5 Punkte)**
Sei M ein dreieckiges Prisma, welches durch die xy, xz, yz-Ebenen, sowie $2x + 3y + 6z = 12$ beschränkt wird. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauss $\int_{\partial M} \omega$ für die folgenden Differentialformen:

(a) $\omega = 3ydx \wedge dy + 18zdy \wedge dz - 12dz \wedge dx$,

(b) $\omega = zdx \wedge rdy + x^2 dy \wedge dz + ydz \wedge dx$.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**
Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss die folgende Rekursionsformel

$$vol_n(K_n) = \frac{1}{n} vol_{n-1}(S_{n-1}),$$

wobei K_n die n-dimensionale Einheitskugel und S_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre, also den Rand der n-dimensionalen Einheitskugel, darstellen.
Hinweis. Betrachten Sie die Differential-1-Form $\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i dx_i$.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**
Sei ∂M die Kurve, die entsteht wenn man den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ mit der Fläche $z = x + 1$ schneidet. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial M} \omega$ für $\omega = -x^2 ydx + xy^2 dy + z^3 dz$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei μ ein Mass auf $(0, \infty)$, definiert durch $\mu(dx) = e^{-x}dx$. Zeigen Sie, dass $d(f, g) = \sqrt{\int_0^\infty (f(x) - g(x)^2 e^{-x} dx}$ auf $L^2(\mu)$ eine Metrik ist.

Gesamt: 20 Punkte