

1. Übungsblatt

Ausgabe: 07.04.2011

Abgabe: 21.04.2011

Präsenzaufgabe 1

Berechnen Sie die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ mit Hilfe des Integrals $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ und dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Präsenzaufgabe 2

Formulieren $\int_0^1 \left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)^2 dx$ als Doppelsumme und zeigen Sie dass $\int_0^1 \left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)^2 dx = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Aufgabe

(4(+2) Punkte)

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{D}$, die definiert ist durch

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in [0, 1] : \exists m \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^m\} \text{ so dass } x = \frac{k}{2^m} \right\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gegeben durch $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{D}}(x)$ nicht Riemann-integrierbar ist.
- (b) Finden Sie für jede Zahl $c \in [0, 1]$ eine Partition von $[0, 1]$ und Punkte ξ_i^n , $i = 1, \dots, n$, so dass

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i^n) |I_i^{(n)}| = c.$$

2. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_0^x f(z) dz$, $x > 0$.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ gilt:

$$\int_0^a x f(x) dx = a F(a) - \int_0^a F(x) dx.$$

- (b) Sei nun für $\lambda > 0$ die Funktion f gegeben durch $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x f(x) dx.$$

3. Aufgabe

(6 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^k}$ für $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Berechnen Sie für $0 < a < b$ das Integral $\int_a^b f(x) dx$.
- (b) Begründen Sie, für welche $k \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx$ existiert.
- (c) Begründen Sie, für welche $k \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert.

4. Aufgabe

(5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass für $k \geq 1$ das uneigentliche Integral $\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^{k-1} e^{-x} dx$ existiert.
Hinweis: Zerteilen Sie das Integrationsintervall geschickt.
- (b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ und benutzen Sie $\Gamma(1) = 1$.

Gesamt: 20 (+2) Punkte