Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 8

Abgabe am 15.06.16

Aufgabe 1 (Wachsende Dichtequotienten) [*5 Punkte*]

a) Betrachte die Familie der translatierten logistischen Verteilungen mit Dichten

$$f(x,\vartheta) := \frac{e^{x-\vartheta}}{(1+e^{x-\vartheta})^2},\ x,\vartheta \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass diese Familie wachsende Dichtequotienten bzgl. $T(x) = x$ hat.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{U}_{(0,\vartheta)}, \vartheta > 0$, und schreibe $X := (X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass das Modell wachsende Dichtequotienten bzgl. $T(x) := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ hat.

Aufgabe 2 (Minimax-Test) [*5 Punkte*]

Gegeben sei ein Standardmodell $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, p_0, p_1)$ mit einfacher Nullhypothese $\Theta_0 = \{0\}$ und einfacher Alternative $\Theta_1 = \{1\}$. Ein Test φ von Θ_0 gegen Θ_1 heißt Minimax-Test, wenn das Maximum der Irrtumswahrscheinlichkeiten erster und zweiter Art minimal ist. Zeigen Sie, dass es einen Neyman-Pearson-Test φ mit $\mathbb{E}_0(\varphi) = \mathbb{E}_1(1-\varphi)$ gibt und dieser ein Minimax-Test ist.

Aufgabe 3 (Urnenmodell) [*5 Punkte*]

In einer Urne liegen ϑ schwarze und $n - \vartheta$ rote Kugeln. Die Gesamtzahl der Kugeln sei bekannt. Wir möchten die unbekannte Anzahl ϑ der schwarzen Kugeln schätzen und ziehen dazu $N < n$ Kugeln ohne Zurücklegen.

a) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ.

b) Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Nullhypothese $\Theta_0 := \{0, \ldots, \vartheta_0\}$ gegen die Alternative $\Theta_1 := \{\vartheta_1, \vartheta_1 + 1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 4 (Bayes-Test) [*5 Punkte*]

Sei φ ein Test von Θ_0 gegen Θ_1 in einem Standardmodell $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, p_0, p_1)$ mit einfacher Nullhypothese $\Theta_0 = \{0\}$ und einfacher Alternative $\Theta_1 = \{1\}$, und sei $\lambda \in (0,1)$. Zeigen Sie: φ minimiert die gewichtete Irrtumswahrscheinlichkeit $\lambda\mathbb{E}_0(\varphi) + (1-\lambda)\mathbb{E}_1(1-\varphi)$ genau dann, wenn φ bis auf eine Menge N mit $\mathbb{P}_0(N) = \mathbb{P}_1(N) = 0$ ein Neyman–Pearson-Test zum Schwellenwert $c = \lambda/(1-\lambda)$ ist. In diesem Falle heißt φ dann ein Bayes-Test zur Vorbewertung $(\lambda, 1-\lambda)$.