Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 7

Abgabe am 08.06.16

Aufgabe 1 (Zusammenhang von Konfidenzbereichen und Tests) [*4 Punkte*]

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta \,|\, \theta \in \Theta)$ ein statistisches Modell.

a) Zeigen Sie: Ist $C : \Omega \to \mathcal{P}(\Theta)$ ein Konfidenzbereich für θ zum Irrtumsniveau α und $\theta_0 \in \Theta$, so ist

$$\varphi_{\theta_0}(x) := \begin{cases} 1, & \theta_0 \notin C(x) \\ 0, & \theta_0 \in C(x) \end{cases}$$

ein nichtrandomisierter Test der Nullhypothese $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ gegen die Alternative $\Theta_1 = \{\theta \,|\, \theta \neq \theta_0\}$ zum Niveau α.

b) Sei umgekehrt für jedes θ_0 ein nichtrandomisierter Test φ_{θ_0} der Nullhypothese $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ gegen die Alternative $\Theta_1 = \{\theta \,|\, \theta \neq \theta_0\}$ zum Niveau α gegeben. Dann ist

$$C(x) := \{\theta \in \Theta \,|\, \varphi_\theta(x) = 0\}$$

ein Konfidenzbereich zum Niveau α für θ.

Aufgabe 2 (Testproblem) [*6 Punkte*]

Karla und Maximilian werfen täglich eine Münze um zu entscheiden, wer im Mathecafé den Kaffee für beide bezahlt. Maximilian ist misstrauisch und möchte testen, ob die Wahrscheinlichkeit, dass er verliert, höchstens $\frac{1}{2}$ beträgt oder ob sie größer ist. Er notiert sich an 10 Tagen die Ergebnisse der Münzwürfe.

a) Formulieren Sie dieses Problem als Testproblem. Geben Sie dabei explizit den Stichprobenraum S, die betrachtete Menge der Verteilungen μ_θ, die Nullhypothese und die Alternative an.

b) Beschreiben Sie verbal, worin in dieser Situation die Fehler erster und zweiter Art bestehen.

c) Maximilian legt fest, dass er das Spiel als unfair bezeichnet, wenn er nicht mindestens zweimal gewinnt. Geben Sie die Teststatistik und den kritischen Bereich an. Bestimmen Sie das effektive Niveau des Tests.

d) Konstruieren Sie einen nicht randomisierten Test zum Niveau $\alpha = 5\%$. Maximilian hat zweimal gewonnen. Betrachtet Maximilian das Spiel nach der hier konstruierten Entscheidungsregel als unfair?

e) In Wirklichkeit sei die Münze so, dass Maximilian mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ gewinnt. Wie groß ist dann für den Test aus c) die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art?

Aufgabe 3 (Gleichmäßig bester Test) [*5 Punkte*]

Geben Sie in den folgenden Fällen einen gleichmäßig besten Test für $H_0 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_0$ gegen $H_1 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_1$ zum Niveau α an:

a) Für $\alpha \in (0, 1/2)$, $\mathbb{P}_0 = \mathcal{U}_{(0,2)}$ und $\mathbb{P}_1 = \mathcal{U}_{(1,3)}$, wobei $\mathcal{U}_{(a,b)}$ die Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b) bezeichnet.

b) Für $\alpha \in (0, 1)$, $\mathbb{P}_0 = \mathrm{Exp}(a)$ und $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Exp}(b)$ mit $0 < a < b$.

Aufgabe 4 (Geometrie der Irrtumswahrscheinlichkeit) [*5 Punkte*]

Sei $\Phi := \{\varphi \,|\, \varphi : \Omega \to [0, 1]\}$ die Menge der Tests auf Ω für $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta = \theta_1$. Mit $G_\varphi(\theta) := \mathbb{E}_\theta(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mathbb{P}_\theta$ bezeichnen wir die Gütefunktion des Tests $\varphi \in \Phi$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R} := \{(G_\varphi(\theta_0), 1 - G_\varphi(\theta_1)) \,|\, \varphi \in \Phi\}$ konvex und punktsymmetrisch zu $(0.5, 0.5)$ ist.

b) Sei nun $\Omega = [0, \infty)$ und $\mathrm{d}\mathbb{P}_\theta = \theta e^{-\theta x} \mathrm{d}x$. Außerdem sei $\theta_0 = 1$ und $\theta_1 = 2$. Bestimmen und zeichnen Sie $\mathcal{R}$.