Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 5

Abgabe am 23.05.16

Aufgabe 1 (Bayes-Schätzer) [*5 Punkte*]

Seien $X_1, \ldots, X_N$ i.i.d. $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$-verteilt, wobei $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$ die Gleichverteilung auf dem Interval $[0, \theta]$ bezeichnet, und sei θ A-priori Pareto-(k, a)-verteilt mit $k > 0, a > 0$ (siehe Blatt 3, Aufgabe 1). Bestimmen Sie die A-posteriori Verteilung und den Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$ für θ.

Aufgabe 2 (Bester Schätzer) [*5 Punkte*]

Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ und es sei $g(X)$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\gamma : \theta \to \gamma(\theta) \subset \mathbb{R}$ mit $E_\theta[(g(X))^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass $g(X)$ ein gleichmäßig varianzminimierender Schätzer ist, genau dann wenn $E_\theta[g(X)U(X)] = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ und für alle Statistiken U mit $E_\theta[U(X)] = 0$ und $E_\theta[(U(X))^2] < \infty$.

Aufgabe 3 (Ein- und beidseitige Exponentialverteilungen) [*5 Punkte*]

Gegeben sei das statistische Modell $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\theta : \theta \in \mathbb{R})$. Konstruieren Sie ein minimales Konfidenzintervall für θ zum Irrtumsniveau α für

a. das Wahrscheinlichkeitsmaß P_θ mit Dichte
$$\rho_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{\theta\leq x}.$$

b. das Wahrscheinlichkeitsmaß P_θ mit Dichte
$$\rho_\theta(x) = \frac{ab}{a+b}\left(e^{-a|x-\theta|}\mathbb{1}_{x<\theta} + e^{-b|x-\theta|}\mathbb{1}_{x\geq\theta}\right),$$
wobei $a, b > 0$ feste Parameter sind.

Aufgabe 4 (Mehrdimensionaler Konfidenzbereich) [*5 Punkte*]

Es sei $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T \in \mathbb{R}^k$ und für $j = 1, \ldots, k$ sei $C_j(\theta) = (\overline{c}_j(X), \underline{c}_j(X))$ ein $(1 - \alpha_j)$-Konfidenzintervall für θ_j. Weiter sei $C(\theta) = C_1(\theta) \times \ldots \times C_k(\theta)$.

a. Zeigen Sie, dass $C(\theta)$ ein Konfidenzbereich für θ zum Niveau $1 - \sum_{j=1}^k \alpha_j$ ist.

b. Die Konfidenzintervalle $C_1(\theta), \ldots, C_k(\theta)$ heißen stochastisch unabhängig falls die Zufallsvariablen $((\overline{c}_1(X), \underline{c}_1(X)), \ldots, (\overline{c}_k(X), \underline{c}_k(X)))$ unabhängig sind. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $C(\theta)$ ein Konfidenzbereich zum Niveau $\prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j)$ ist. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil a..

c. Es sei nun $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha$. Wie muss in Teil a. und b. α gewählt werden, damit man einen Konfidenzbereich für θ zum Niveau $1 - \gamma$ erhält?