Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Dr. Robert Philipowski, Eva Kopfer, Angelo Profeta

"Einführung in die Statistik"

Übungszettel Nr. 4

Abgabe am 11.05.16

Aufgabe 1 (Randomized response) [*5 Punkte*]

Um bei Umfragen zu heiklen Themen (zum Beispiel: "Mögen Sie diese Vorlesung?") die Privatsphäre der befragten Personen zu schützen und zuverlässige Antworten zu bekommen, kann die folgende Variante des *unrelated question-Befragungsmodells* verwendet werden:

Der Interviewer läßt den Befragten zweimal einen Würfel werfen, ohne dass der Interviewer den Ausgang des Würfelexperiments sieht. Wenn der Befragte die Augensumme 5 oder 6 erzielt, so soll er die ihm vorgelegte heikle Frage bejahen, bei der Augensumme 8 oder 9 soll er sie verneinen. Anderenfalls soll er die gestellte Frage wahrheitsgemäß beantworten.

Es werden nun N Personen unabhängig voneinander befragt, wobei $\theta \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass die heikle Frage wahrheitsgemäß bejaht wird. Präzisieren Sie das statistische Modell, geben Sie einen erwartungstreuen, gleichmäßig varianzminimierenden Schätzer für θ an und bestimmen Sie dessen Varianz.

Aufgabe 2 (Exponentielle Familien) [*5 Punkte*]

Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Verteilungsfamilien, definiert durch ihre Dichten bzgl. des Lebesgue-Maßes, es sich um eine 1-parametrische exponentielle Familie handelt. Geben Sie gegebenenfalls $T(x)$, $a(\vartheta)$, $b(\vartheta)$, $c(x)$ an.

a) $f_\theta(x) = \frac{\theta^x}{x!}\exp(-\theta), \quad x \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \theta > 0$

b) $f_\theta(x) = \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)\exp(-2\log\theta + \log(2x)), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0$

c) $f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|), \quad x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$ (Laplace Verteilung)

d) $f_\alpha(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(-\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{x}} \mathbb{1}_{x>0}, \quad x \in \mathbb{R}, \beta > 0, \alpha > 0$ (Inverse Gammaverteilung mit β bekannt)

e) $f_\beta(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(-\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{x}} \mathbb{1}_{x>0}, \quad x \in \mathbb{R}, \beta > 0, \alpha > 0$ (Inverse Gammaverteilung mit α bekannt)

Aufgabe 3 (Konsistenz) [*5 Punkte*]

Seien $(X_i, i \in \mathbb{N})$ $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$-verteilt mit Kovarianz $C(X_i, X_j) = \rho_{j-i}$ für $i < j$. Wir schätzen μ mit $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$. Zeigen Sie:

a) $\hat{\mu}_N$ sind keine konsistenten Schätzer für μ, falls $\rho_{j-i} = \rho \neq 0$ für alle $i < j$.

b) $\hat{\mu}_N$ sind konsistente Schätzer für μ, falls $\rho_{j-i} \leq M\gamma^{j-i}$ mit $\gamma < 1$.

Aufgabe 4 (Eindeutigkeit bester Schätzer) [*5 Punkte*]

In einem statistischen Modell $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ seien S, T zwei gleichmäßig varianzminimierende, erwartungstreue Schätzer für eine reelle Kenngröße $\tau(\vartheta)$. Zeigen Sie, dass für alle ϑ gilt: $\mathbb{P}_\vartheta(S = T) = 1$.