Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 9

1. (Unfaire Münzwürfe und asymmetrischer random walk).

a) Eine Münze wird wiederholt geworfen. Bei jedem Wurf fällt ,,Zahl" mit Wahrscheinlichkeit p. Seien K_n und Z_n die Anzahlen von ,,Kopf" bzw. ,,Zahl" bei den ersten n Würfen. Zeige für $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P[2p-1-\varepsilon \leq \frac{1}{n}(Z_n - K_n) \leq 2p-1+\varepsilon] \;=\; 1\,.$$

b) Beim asymmetrischen random walk (biased random walk) S_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) auf $\mathbb{Z}$ wird vor jedem Bewegungsschritt eine Münze mit Wahrscheinlichkeit $p \neq \frac{1}{2}$ für ,,Zahl" geworfen. Fällt Kopf bzw. Zahl, dann fällt bzw. steigt die Position im nächsten Schritt um eine Einheit. Zeige, daß S_n mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft zum Startpunkt zurückkehrt.

2. (Gesetz der großen Zahlen). Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E[X_i] = m$ und $\mathrm{var}\,(X_i) = \sigma^2$. Es gelte

$$|\mathrm{cov}\,(X_i, X_j)| \;\leq\; r(|i-j|)$$

für eine Funktion $r : \mathbb{N} \to (0, \infty)$. Finde Bedingungen für r, also Bedingungen für das ,,Abklingen" der Korrelationen, unter denen immer noch das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right] \;=\; 0 \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{gilt.}$$

3. (Absolutstetigkeit bei Münzwurfmodellen).

a) Seien P und Q die Wahrscheinlichkeitsmaße aus den Münzwurfmodellen mit Erfolgswahrscheinlichkeiten p bzw. q auf $\{0,1\}^n$. Zeige: Falls $q \in (0,1)$, so gilt $P \ll Q$. Gib $\frac{dP}{dQ}$ an!

b) Seien P und Q die Wahrscheinlichkeitsmaße aus den Münzwurfmodellen mit Erfolgswahrscheinlichkeiten p bzw. q auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Zeige: Falls $q \neq p$, gilt $P \ll Q$ *nicht*.

4. Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ mit Dichten f, g bzgl. λ. Zeige, dass dann gilt

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow f = 0 \text{ f.ü. auf } \{\text{g=0}\} \ .$$

Gib für diesen Fall einen Ausdruck für die Dichte $\frac{d\mu}{d\nu}$ an!

5. (Rückkehr des random walk zum Startpunkt).
Sei $S_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \ldots, 2N)$ der random walk auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0, und sei

$$T_0(\omega) \ = \ \min\{n > 0 \,|\, S_n(\omega) = 0\}$$

die erste Rückkehrzeit nach 0 und

$$L(\omega) \ = \ \max\{0 \leq n \leq 2N \,|\, S_n(\omega) = 0\}$$

der Zeitpunkt des letzten Besuchs in 0. Zeige :

$$\begin{aligned} P[T_0 > 2n] \ &= \ P[S_{2n} = 0] \qquad \text{und} \\ P[L = 2n] \ &= \ P[S_{2n} = 0] \cdot P[S_{2N-2n} = 0] \ = \ 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2N-2n}{N-n} . \end{aligned}$$