Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 8

1. (Dichten für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen).

Seien $$P[A] \;=\; \sum_{\omega\in A} p(\omega) \qquad \text{und} \qquad Q[A] \;=\; \sum_{\omega\in A} q(\omega)\,, \qquad A\in\mathcal{P}(\Omega)\,,$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer abzählbaren Menge Ω. Zeige, daß P genau dann eine Dichte ρ bzgl. Q hat, wenn P in folgendem Sinn *absolutstetig* bzgl. Q ist:

$$\forall\,\omega\in\Omega\;: \qquad q(\omega)=0\;\Rightarrow\;p(\omega)=0\;.$$

In diesem Fall gilt

$$\rho(\omega) \;=\; \frac{p(\omega)}{q(\omega)} \qquad \text{für alle } \omega\in\Omega \text{ mit } q(\omega)\neq 0.$$

2. (Positive Korrelation monotoner Zufallsvariablen). Sei $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $f,g\in\mathcal{L}^2$. Zeige sind X, Y unabhängige Ω-wertige Zufallsvariablen mit Verteilung P, so gilt

$$Cov(f,g)=\frac{1}{2}E\left[\left(f(X)-f(Y)\right)\left(g(X)-g(Y)\right)\right].$$

Folgere, dass $Cov(f,g)\geq 0$, wenn $(\Omega,\mathcal{A})=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und f und g beide monoton wachsend sind.

3. Seien $X_1,X_2,\ldots$ unkorrelierte Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 $(m,\sigma\in\mathbb{R})$. Sei $S_n=X_1+\ldots+X_n$.

a) Zeige:
$$\operatorname{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to 0 \qquad \text{für } n\to\infty.$$

b) Für alle $Y\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ und $\varepsilon>0$ gilt :
$$\operatorname{var}(Y) \;\geq\; \varepsilon^2\cdot P\left[|Y-E[Y]|\geq\varepsilon\right].$$

c) $\frac{S_n}{n}$ konvergiert stochastisch gegen m, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] \;=\; 0 \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

4. Berechne die Varianz

a) einer $Bin(n,p)$-verteilten Zufallsvariable

b) einer $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable

c) einer $Poisson(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable!

5. (Der L^1-Fehler). Sei X eine reellwertige Zufallsvariable und sei $a_0 \in \mathbb{R}$ ein Median von X, d.h.,

$$P[X < a_0] \leq \frac{1}{2} \text{ und } P[X > a_0] \leq \frac{1}{2}.$$

Zeige, dass a_0 den L^1-Fehler

$$\varepsilon(a) = E[|X - a|].$$

minimiert.