Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 7

1. Sei P die Gleichverteilung auf der Menge Ω der Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$. Für eine Permutation ω bezeichne $X(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte. Berechne den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; E[X^2] - E[X]^2 \,.$$

Hinweis: $X = \sum_{i=1}^n I_{\{\omega\in\Omega|\omega(i)=i\}}$.

2. (Berechnung von Erwartungswerten aus der Verteilung). Sei $T \geq 0$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweise ohne Verwendung des Satzes von Fubini, daß $x \mapsto P[T > x]$ Borel–meßbar ist mit

$$E[T] \;=\; \int_0^\infty P[T > x]\, dx \,.$$

Hinweis : Betrachte zunächst den Fall, daß T nur endlich viele Werte $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_k$ annimmt. Zeige

$$E[T] \;=\; \sum_{i=1}^k (c_i - c_{i-1})\, P[T \geq c_i] \;=\; \int_0^\infty P[T > x]\, dx \,.$$

3. (Asymptotische Ereignisse). Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen positiven Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Welche der folgenden Ereignisse sind asymptotische Ereignisse ?

$$\{X_n > 2n \text{ unendlich oft}\},\ \{\liminf X_n < 17\},\ \{\inf X_n > 5\},$$
$$\{\sum_{n=1}^\infty X_n < 1\},\ \{\sum_{n=1}^\infty X_n < \infty\},\ \{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\}.$$

b) Gib Beispiele von tail–field–meßbaren Zufallsvariablen an (mit Beweis).

4. (Einschluß–/Ausschlußprinzip).
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Zeige

$$I_{\bigcup A_i} \;=\; 1 - \prod (1 - I_{A_i}) \,,$$

und folgere

$$P\left[\bigcup A_i\right] \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P\left[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right] \,.$$

5. (Rekorde). Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit *stetiger* Verteilungsfunktion. Seien $E_1 := \Omega$, und, für $n \ge 2$,

$$E_n \;:=\; \{X_n > X_m \,\forall\, m < n\} \;=\; \text{„ein Rekord wird zur Zeit } n \text{ erreicht"}.$$

Zeige, daß die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ unabhängig sind mit $P[E_n] = 1/n$.

6. (Perkolation). Sei $p \in [0,1]$. Wir betrachten unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i \in \mathbb{Z}^d$, mit $P[X_i = 1] = p$ und $P[X_i = 0] = 1 - p$. Der Gitterpunkt $i \in \mathbb{Z}^d$ heißt durchlässig, falls $X_i = 1$ gilt. Sei A das Ereignis, daß eine unendliche Zusammenhangskomponente aus durchlässigen Gitterpunkten existiert. A_0 sei das Ereignis, daß der Nullpunkt in einer unendlichen Zusammenhangskomponente von durchlässigen Punkten enthalten ist. Zeige:

a) Im Fall $d = 1$, $p < 1$, gilt $P[A] = 0$.

b) Für alle $d = 1, 2, \ldots$ und $p \in [0,1]$ gilt

$$P[A] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P[A_0] > 0.$$