Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 6

1. Angenommen, die Anzahl der Geburten an einem Tag in einem Krankenhaus ist Poissonverteilt mit Parameter λ. Jede Geburt ist ein Junge mit Wahrscheinlichkeit p und ein Mädchen mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$, unabhängig von anderen Geburten (und unabhängig von der Gesamtzahl der Geburten). Seien J und M die Zahl der Jungen bzw. Mädchen.

a) Zeige : $P[J = j, M = m] = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^m}{m!}$.

b) Folgere : J und M sind unabhängig und Poissonverteilt mit Parameter λp bzw. λq.

2. Sei P_p die zum Münzwurfmodell mit Erfolgsparameter $p \in [0, 1]$ gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum Ω der binären Folgen $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$, und sei $X_i(\omega) = x_i$. Sei P die durch

$$P[A] = \int_0^1 P_p[A]\, dp$$

definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω.

a) Sind die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig bezüglich P ?

b) Sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Wie verhalten sich die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n}S_n$ unter P ?

3. (Ballot theorem).

a) Wir betrachten den random walk mit Start in 0. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_a(\omega) = \min \{n \in \mathbb{N} |\, S_n(\omega) = a\}.$$

Insbesondere ist T_0 die *erste Rückkehrzeit zum Startpunkt.* Zeige für $a > 0$:

$$P[\, T_0 > n \text{ und } S_n = a\,] = P[\, T_a = n\,] = \frac{a}{n} P[\, S_n = a\,].$$

(Die Aussage von Aufgabe 3 vom letzten Blatt kann vorausgesetzt werden).

b) Bei einer Wahl erhält Kandidat A α Stimmen, und Kandidat B β Stimmen, $\alpha > \beta$. Angenommen, die Stimmen werden in „völlig zufälliger" Reihenfolge ausgezählt. Zeige : Die Wahrscheinlichkeit, daß A während der Stimmenauszählung stets in Führung liegt, ist $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$.

4. (Drosophila melanogaster). Das Genom der Taufliege Drosophila melanogaster gliedert sich in etwa $m = 7000$ Abschnitte (die anhand des Färbungsmusters der in der Speicheldrüse befindlichen Riesenchromosomen erkennbar sind). Zur Vereinfachung sei angenommen, dass sich in jedem Abschnitt gleich viele, nämlich $M = 23000$ Basenpaare befinden. Das Genom umfasst also $N = mM$ Basenpaare. Durch hochenergetische Bestrahlung werden $n = 1000$ (rein zufällig verteilte) Basenpaare zerstört. Finde ein stochastisches Modell für die Anzahl der zerstörten Basenpaare in allen Genomabschnitten. Berechne für jedes $1 \leq i \leq m$ die Verteilung der Anzahl Z_i der zerstörten Basenpaare im Abschnitt i und bergründe, dass Z_i approximativ Poisson-verteilt ist.

5. (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen). Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeige :

a) Nimmt jedes X_i nur abzählbar viele Werte an, dann sind $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn

$$P[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] \;=\; \prod_{k=1}^{n} P[X_k = a_k] \;\; \forall\, a_k \in X_k(\Omega) \;\; (1 \leq k \leq n).$$

b) Allgemein sind $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn

$$P[X_1 \leq c_1, \ldots, X_n \leq c_n] \;=\; \prod_{k=1}^{n} P[X_k \leq c_k] \;\; \forall\, c_k \in \mathbb{R} \;\; (1 \leq k \leq n).$$