Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 5

1. (Pflanzenzucht). Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung reinrassiger (d.h. homozygotischer) Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung. Begründe, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) := P[\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 | \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n]$$

durch $p(Aa, AA) = p(Aa, aa) = 1/4$, $p(Aa, Aa) = 1/2$ und $P(aa, aa) = P(AA, AA) = 1$ gegeben sind. Berechne für beliebiges n die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit

$$p^n(Aa, Aa) = P[Aa \text{ in Generation } n | Aa \text{ am Anfang}].$$

2. (Simulation von Zufallsvariablen). Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion einer **reellwertigen** Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeige : F ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 .$$

b) Sei $\lambda_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sieht der Graph von F aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\lambda_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist ?

c) Für $u \in (0,1)$ sei

$$\tilde{X}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq u\} = \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < u\}$$

die „linksstetige verallgemeinerte Inverse" von F. Skizziere $\tilde{X}$ für das Beispiel aus b). Zeige, daß $\tilde{X}$ eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat.

(Ein Element $\omega \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte „Zufallszahl". Dies liefert eine Möglichkeit, die Zufallsvariable X auf dem Computer zu simulieren. Welche Probleme könnten dadurch entstehen, daß vom Computer erzeugte Zufallszahlen nie wirklich zufällig sind, sondern durch einen deterministischen Algorithmus generiert werden ? Für welche Arten von Verteilungsfunktion könnte es insbesondere Probleme geben ?)

3. (Random walk). Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{\omega = (x_1, \dots, x_N) |\, x_i \in \{-1, +1\}\ \}$ und $X_i(\omega) = x_i$. Wir interpretieren

$$S_n \ = \ X_1 + \ldots + X_n \qquad (n = 0, 1, \dots, N)$$

als die zufällige Bewegung eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0 (*random walk*). Für $a \in \mathbb{N}$ sei

$$T_a \ = \ \min\{n > 0 |\, S_n = a\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs in a. Zeige :

a) Für jedes $c > 0$ gilt :

$$P[S_n = a - c,\, T_a \le n] \ = \ P[S_n = a + c] \qquad \text{,,Reflektionsprinzip''}.$$

*b) Für die Verteilung von T_a gilt:

$$\begin{aligned} P[T_a \le n] \ &= \ P[S_n \notin [-a, a-1]]\,, \\ P[T_a = n] \ &= \ \frac{1}{2}(P[S_{n-1} = a-1] - P[S_{n-1} = a+1]) \ = \ \frac{a}{n} P[S_n = a]\,. \end{aligned}$$

Hinweis : $\frac{1}{2}(P[S_{n-1} = a-1] + P[S_{n-1} = a+1]) = P[S_n = a]$.

4. Eine Münze mit Wahrscheinlichkeit p für ,,Zahl'' wird wiederholt geworfen. Sei A_k das Ereignis, daß bei den Würfen $2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1$ mindestens k mal in Folge ,,Zahl'' fällt. Zeige:

$$\begin{array}{lrcll} \text{a)} & P[A_k \text{ unendlich oft}\,] & = & 0 & \text{falls } p < 1/2. \\ \text{b)} & P[A_k \text{ unendlich oft}\,] & = & 1 & \text{falls } p \ge 1/2. \end{array}$$

Hinweis zu b): Betrachte die Ereignisse E_i, daß in den k Würfen ab dem $2^k + (i-1)k$–ten Wurf stets Zahl fällt.

5. Bestimme die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten für die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$p \ = \ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$