Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 4

1. (Polyas Urnenmodell). Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen, und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei $R_n(\omega)$ die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{n,r} \;:=\; P[R_n = r] \qquad (n \geq 0,\ 1 \leq r \leq n+1\,)$$

a) für $n = 1, 2$ und 3, b) allgemein.

2. ("Runs" bei Münzwürfen).
Eine Münze wird wiederholt geworfen. Die einzelnen Würfe seien unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p für Kopf. Sei E das Ereignis, dass eher r mal hintereinander Kopf als s mal hintereinander Zahl fällt. Sei $X_1(\omega)$ der Ausgang des ersten Wurfs. Zeige:

$$P[E|X_1 = \text{Kopf}] = p^{r-1} + (1 - p^{r-1})P[E|X_1 = \text{Zahl}].$$

Finde eine ähnliche Formel für $P[E|X_1 = \text{Zahl}]$, und berechne P[E].

3. $A_1, A_2, \ldots$ sei eine Folge von unabhängigen Ereignissen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[A_n] < 1$ und $P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = 1$. Zeige :

$$P\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right] \;=\; 1\,.$$

4. (Bandrika 2).
Tom Bayes befindet sich auf seiner Bandrika-Reise genau in der Situation, in der du in Aufgabe 1 des letzten Zettels warst. Anders als du geht er jedoch davon aus, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist. Zeige:

a) Egal welche Antwort Tom auf seine erste Frage bekommt - er glaubt weiterhin, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist.

b) Sind die ersten beiden Antworten identisch (OO oder WW), so glaubt Tom weiterhin, dass die Antwort Osten mit Wahrscheinlichkeit ε korrekt ist.

c) Nach drei gleichen Antworten beurteilt Tom die Situation folgendermaßen:

$$P[\text{Osten korrekt}|\text{OOO}] = \frac{9\varepsilon}{11-2\varepsilon} \qquad \text{und} \qquad P[\text{Osten korrekt}|\text{WWW}] = \frac{\varepsilon}{9-2\varepsilon}.$$

Welche Werte ergeben sich für $\varepsilon = \frac{9}{20}$?

5. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie).
Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\,.$$

Sei $X(\omega)$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$P[X=n] \;=\; \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}\;.$$

Sei E_m das Ereignis „X ist teilbar durch m".

a) Zeige $P[E_m] = m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Zeige, daß die Ereignisse E_p, p Primzahl, unabhängig sind.
(1 ist keine Primzahl!)

c) Berechne $P[\bigcap E_p^c]$, und folgere die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} \;=\; \prod_{p \text{ Primzahl}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\;.$$

d) Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, daß X durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist, beträgt $1/\zeta(2s)$.

*e) *(optional).* Sei Y *unabhängig* von X (*d.h.* $P[Y=m, X=n] = P[Y=m]\cdot P[X=n]$) mit derselben Verteilung, und sei H der größte gemeinsame Teiler von X und Y. Sei B_p das Ereignis, daß X und Y beide durch p teilbar sind. Was hat das Ereignis $\bigcap B_p^c$ mit H zu tun ? Zeige :

$$P[H=n] \;=\; \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}\;.$$

Definition: Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{N}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\{\omega | X(\omega) = n\} \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$.