

1. (Gesetz der großen Zahlen via charakteristische Funktionen).

- a) Beweise mithilfe von charakteristischen Funktionen die folgende Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen : Sind $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_i] = m$, dann konvergiert die Verteilung von $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ schwach gegen das Diracmaß δ_m .
- b) Folgere hieraus, daß $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ auch stochastisch gegen m konvergiert.

2. $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien unabhängig und identisch verteilt mit $E[X_i] = 0$ und $\text{var}(X_i) > 0$. Sei $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Zeige :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \quad P\text{-f.s.}$$

(Der zentrale Grenzwertsatz kann vorausgesetzt werden).

3. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ und $Y : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit gemeinsamer Verteilung $\mu_n(dx)p(x, dy)$, wobei μ_n die $\Gamma(1, n)$ Verteilung ist, und $p(x, \cdot)$ die Poissonverteilung mit Parameter x . Mit anderen Worten : X ist $\Gamma(1, n)$ verteilt, und, gegeben $X = x$, hat Y Poissonverteilung mit Parameter x .

- a) Berechne die charakteristische Funktion von Y .
- b) Zeige, daß die Verteilung von

$$\frac{Y - E[Y]}{\sqrt{\text{var}(Y)}}$$

für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen $N(0, 1)$ konvergiert.

- c) Warum hätte man dies auch aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes vermuten (aber nicht so leicht beweisen) können ?

4. (Satz von Slutsky). Seien X_n, Y_n, X und Y Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit $X_n \rightarrow X$ und $Y_n \rightarrow Y$ in Verteilung.

- a) Demonstriere anhand eines Beispiels, daß $X_n + Y_n$ nicht notwendig in Verteilung gegen $X + Y$ konvergiert.
- b) Zeige, daß diese Konvergenz gilt, wenn Y konstant ist.

5. Eine Lehrmittelfirma liefert physikalische Widerstände und behauptet, deren Widerstände seien normalverteilt mit Mittelwert 50 und Standardabweichung 5 (jeweils in Ohm). Gib je einen Test für die beiden Testprobleme

- a) $H_0 : m \leq 55$ gegen $H_1 : m > 55$
- b) $H_0 : v \leq 25$ gegen $H_1 : v > 25$

zum Niveau $\alpha = 0.05$ an (bei Vorliegen von 10 Messungen unter Normalverteilungsannahme; m und v beide unbekannt). Wie lautet die Entscheidung bei folgenden Messergebnissen für 10 Widerstände:

45.9 68.5 56.8 60.0 57.7 63.0 48.2 59.0 55.2 50.6

6. (Letzte Besuchszeit des random walk). Die letzte Besuchszeit L_N in 0 des random walk $S_n, 0 \leq n \leq 2N$, mit Start in 0 hat die Verteilung

$$P[L_N = 2n] = 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2N-2n}{N-n},$$

s. Aufgabe 5 von Blatt 9. Zeige, daß die Verteilung von $\frac{L_N}{2N}$ für $N \rightarrow \infty$ schwach gegen die Arkussinusverteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

und Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \quad \text{konvergiert.}$$