Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 12

1. Die Anzahl der Bücher, die während eines Jahres aus einer Bibliothek verschwinden sei Poisson-verteilt. Bei der jährlichen Revision entdeckt man das Fehlen eines Buches mit Wahrscheinlichkeit p; das Buch wird dann ersetzt.

a) Berechne die Anzahl der fehlenden Bücher

i) nach der Revision

ii) vor der nächsten Revision.

b) Betrachte die Situation als Markovkette: finde die zugehörige stochastische Matrix $P = (p_{ij})$ und mit Hilfe von a) eine invariante Verteilung.

2. (Schätzung der Varianz bei bekanntem Erwartungswert). Sei $\mu_v = N(m, v)$ eine Normalverteilung mit *festem* Erwartungswert m und unbekannter Varianz $v \geq 0$. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für v auf der Basis von n unabhängigen Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ von μ_v, und leite ein 95 % Konfidenzintervall für v her.

3. (Simulation der Cauchyverteilung). Die Zufallsvariable U sei gleichverteilt auf $[0, 1]$. Zeige:

a) Die Zufallsvariable $Y = \tan \pi(U - \frac{1}{2})$ besitzt die Verteilungsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}. \tag{1}$$

Bemerkung: Allgemein heißt eine Verteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x - m)^2)}.$$

Cauchy-Verteilung mit Breite $a > 0$ und Median $m \in \mathbb{R}$.

b) Wählt man unabhängige, auf $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen V, W solange bis $V^2 + W^2 \leq 1$, so hat die Zufallsvariable $Y = V/W$ die Dichte wie in (1).

4. (Studentsche t–Verteilung). Zeige:

a) Sind X und Y unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Dichten f, g, und gilt $Y > 0$ P–fast sicher, dann ist auch die Verteilung von X/Y absolutstetig mit Dichte
$$\rho(t) \; = \; \int_0^\infty f(ty)\, g(y)\, y \, dy \; .$$

b) Berechne die Verteilung von
$$T_n \; := \; \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i^2}}$$
für unabhängige $N(0,1)$ verteilte Zufallsvariablen $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$.

5. (Multivariate Normalverteilungen). Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable auf $\mathbb{R}^n$ mit Erwartungswert $m \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also $X \sim N(m, C)$. Zeige: Für $a \in \mathbb{R}^n$ und eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt
$$AX + a \sim N(Am + a, ACA^T).$$

6. (Ruinwahrscheinlichkeiten). Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_i = +1] = P[X_i = -1] = \frac{1}{2}$, und sei
$$S_n \; = \; x_0 + \sum_{i=1}^n X_i \qquad (n \geq 0)$$
der random walk auf $\mathbb{Z}$ mit Start in x_0. Für $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda > x_0$, sei
$$T(\omega) \; := \; \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n(\omega) \notin (0, \lambda)\}$$
die erste Austrittszeit aus $(0, \lambda)$.

a) Zeige: $E[S_T] \; = \; x_0\,.$ *(Hinweis: $S_T = x_0 + \sum_{i=1}^\infty X_i \cdot I_{\{T\geq i\}}$.)*

b) Folgere:
$$P[S_T = 0] \; = \; 1 - P[S_T = \lambda] \; = \; \frac{\lambda - x_0}{\lambda}$$
(Wahrscheinlichkeit, daß beim Startkapital x_0 der Ruin des Spielers vor Erreichen des Levels λ eintritt).