Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 11

1. (Simulation von Ausfallzeiten). Sei $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P[T = n \,|\, T \geq n] \;=:\; p_n \;, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(z.B. erste Ausfallzeit einer Maschine mit Ausfallwahrscheinlichkeiten p_n).
Zeige : Sind U_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, dann hat

$$\tilde{T} \;:=\; \min\{n \geq 0 \,|\, U_n \leq p_n\}$$

dieselbe Verteilung wie T.

2. (Produktdichten).

a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen

$$P[X_i \in B] \;=\; \int_B f_{X_i}(x)\, dx \,, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zeige: Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$ ist absolutstetig bzgl. $\lambda(\mathbb{R}^n)$ mit Dichte

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,.$$

b) Umgekehrt seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung absolutstetig mit einer Dichte in Produktform ist:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\,, \qquad f_i : \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ meßbar.}$$

Zeige: $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig, und die Verteilungen sind absolutstetig mit Dichten

$$f_{X_i} \;=\; f_i \Big/ \int_{\mathbb{R}} f_i \, dx \;, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

3. Seien X und Y unabhängig exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Bestimme die gemeinsame Verteilung von $U := X + Y$ und $V := \frac{X}{X+Y}$. Folgere, daß V auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist.

4. (Ordnungsstatistiken).

a) Betrachte auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Zufallsvariablen X_1,..., X_n, unabhängig, identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F. Zeige

$$F_{\max(X_1,...X_n)}(c) = P[\max(X_1, ...X_n) \leq c] = F(c)^n$$

b) Für $k = 1, \ldots, n$ definiere $X_{k:n}$, die k-te Ordnungsstatistik der X_i, als den k-kleinsten unter den Werten der X_i. (In a) ging es also um die Verteilung von $X_{n:n}$.) Betrachte den Fall, in dem die X_i gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind. Bestimme die Verteilungsfunktion von $X_{k:n}$, und zeige, daß die Verteilung absolutstetig ist mit Dichte

$$f_{k:n}(s) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} s^{k-1}(1-s)^{n-k}, s \in (0, 1)$$

(d.h. $X_{k:n}$ ist Beta-verteilt mit Parametern k, $n - k + 1$).

5. (Gleichmäßige Integrierbarkeit). Zeige, daß eine Familie $\{X_i \,|\, i \in I\}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gleichmäßig integrierbar ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist :

a) *Integrierbare Majorante :* Es existiert $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$|X_i| \;\leq\; Y \qquad \forall\, i \in I\,.$$

b) $\mathcal{L}^p$*–Beschränktheit* für $p > 1$: Es existiert $p > 1$ mit

$$\sup_{i \in I} E[|X_i|^p] \;<\; \infty\,.$$

c) Warum ist $\mathcal{L}^1$–Beschränktheit **nicht** hinreichend für gleichmäßige Integrierbarkeit ?

d) Zeige: Konvergiert X_n gegen X in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dann konvergiert X_n gegen X stochastisch, und $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmäßig integrierbar.