Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 10

1. (Konvergenzbegriffe für Zufallsvariablen). Zeige, daß jede stochastisch konvergente Folge (X_n) von Zufallsvariablen eine fast sicher konvergente Teilfolge besitzt.

2. (Ehrenfestmodell). In zwei Urnen liegen Kugeln. Aus der Gesamtzahl der Kugeln beider Urnen wird eine Kugel zufällig herausgegriffen. Die gezogene Kugel wird dann aus ihrer Urne herausgenommen, und in die andere Urne gelegt.

a) Beschreibe den Vorgang durch eine Übergangswahrscheinlichkeit $p(\cdot,\cdot)$ auf der Menge $S := \mathbb{Z}_+^2$ aller Paare (k_1, k_2) von nichtnegativen ganzen Zahlen.

b) Sei μ die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S mit den Gewichten

$$\mu(k_1, k_2) \;=\; e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k_1}}{k_1!}\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k_2}}{k_2!}\,.$$

Sei X_i $(i = 1, 2)$ die Zahl der Kugeln, die in der Urne i liegen; bezüglich μ sind X_1, X_2 also unabhängige Poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ. Zeige, daß μ eine invariante Verteilung für die durch $p(\cdot,\cdot)$ beschriebene Dynamik ist.

c) Was kann man sagen, wenn die Gesamtzahl N aller Kugeln bekannt ist ?

3. (Bernsteinpolynome). Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \text{ für } p \in [0, 1]$$

das zugehörige *Bernstein-Polynom* n-ten Grades. Stelle f_n in der Form

$$f_n(p) = E\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

mit unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ dar. Folgere, daß die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert.

4. Seien X_1, X_2,... unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeige:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \;=\; \frac{1}{\lambda} \qquad (= E[X_1])$$

.

5. (Entropiemaximierung unter Nebenbedingungen). Sei S ein endlicher Zustandsraum, und $H : \mathcal{M}_1(S) \to [0,\infty)$ das Entropiefunktional auf dem Raum

$$\mathcal{M}_1(S) \;=\; \left\{ \mu \in \mathbb{R}^S \;\middle|\; \sum_{x\in S} \mu(x) = 1,\; \mu(x) \geq 0 \,\forall\, x \right\}$$

der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S.

a) Zeige, daß H strikt konkav ist.

b) Sei $U : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf S. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$\mu_\beta(x) \;=\; \frac{e^{\beta U(x)}}{Z_\beta} \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$

auf S. Dabei ist

$$Z_\beta = \sum_{x\in S} e^{\beta U(x)}$$

die Normierungskonstante. Sei

$$m_\beta \;:=\; E_{\mu_\beta}[U] \;=\; \sum_{x\in S} U(x)\mu_\beta(x)\,.$$

Zeige, dass μ_β die Entropie unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ν auf S mit $E_\nu[U] = m_\beta$ maximiert.

c) Zeige, daß μ_β für $\beta \to 0$ gegen die Gleichverteilung auf S und für $\beta \to \infty$ gegen die Gleichverteilung auf den (globalen) Maxima von U konvergiert.