Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 1

1. (Gleichverteilung).

a) Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω, und zeige durch Überprüfen der Axiome, daß P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) In einer Urne befinden sich N Kugeln, davon K rote. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, daß die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}\Big/\binom{N}{n} \quad .$$

2. (Kolmogorovsche Axiome). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeige $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$, und demonstriere anhand von Beispielen, daß beide Extremfälle eintreten können.

b) Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt

$$P[A \cap B] \;=\; P[A]\,P[B] - P[A^c]\,P[B^c]\,.$$

3. In einer Stadt mit $n+1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es einer dritten, usw. Bei jedem Schritt wird der ,,Empfänger" zufällig aus den n möglichen ausgewählt. Das Gerücht wird r mal weitererzählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß es

a) nicht zum Urheber zurückkommt,

b) keiner Person zweimal erzählt wird.

c) Setze im Ergebnis von a) insbesondere $r = n+1$, und berechne den Limes für $n \to \infty$.

4. Sei $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \ldots) |\, x_i \in \{-1, +1\}\,\}$. Wir definieren Abbildungen $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$S_n(\omega) \; := \; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{falls } \omega = (x_1, x_2, \ldots)\,.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich ?

a) $S_n^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ c) $\bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n} \bigcap_{m \geq n} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$

5. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer abzählbaren Menge Ω.

a) Zeige, daß $\mathcal{P}$ konvex ist.

*b) Beschreibe die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$, und zeige, daß sich jedes $P \in \mathcal{P}$ als ,,Mischung" von Extremalpunkten darstellen läßt, d.h.

$$P = \sum_i \alpha_i P_i \qquad \text{mit } \; \alpha_i \geq 0, \; \sum_i \alpha_i = 1, \;\; P_i \text{ extremal.}$$

****6. (Eine nicht meßbare Teilmenge von S^1).** Sei $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Betrachte die Äquivalenzklassen auf S^1 bzgl. der Relation

$$z \sim \omega \qquad \Leftrightarrow \qquad z = e^{i\alpha} w \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{Q}\,.$$

Folgere aus dem Auswahlaxiom die Existenz von disjunkten Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$, die alle auseinander durch Rotation um den Ursprung hervorgehen, so daß

$$S^1 \; = \; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q\,.$$

Erkläre anschaulich, warum die Existenz des zweidimensionalen Lebesguemaßes impliziert, daß die Mengen A_q nicht Borelsch sind.

Bemerkung: Das Banach-Tarski-Paradox besagt, daß eine Teilmenge F der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ existiert, sodaß sich S^2 für jedes $3 \leq k \leq \infty$ als disjunkte Vereinigung von k Mengen schreiben läßt, die alle durch Rotation von F um den Nullpunkt entstehen !