Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 06/07 Serie 3

1. (Bandrika 1).

Du hast dich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig (s. Aufgabe 2), auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Bandrikaner fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Du fragst eine Person, ob der Ausgang sich in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhälst du Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtig ist?

b) Du fragst dieselbe Person nochmals und bekommst dieselbe Antwort. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

c) Du richtest dieselbe Frage ein drittes Mal an dieselbe Person. wieder mit der Antwort Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt?

d) Ein viertes Mal wird der geduldige Passant von dir gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Zeige, dass die Antwort mit Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{70}$ richtig ist.

e) Zeige für den Fall, dass die vierte Antwort Westen wäre, dass die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ zutrifft.

2. (Unabhängigkeit von Ereignissen).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ heißen unabhängig, falls

$$P[A_1 \cap A_2] = P[A_1]P[A_2]$$

gilt. Allgemeiner heißen Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ unabhängig, falls

$$P[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = P[A_{i_1}]P[A_{i_2}] \cdot \ldots \cdot P[A_{i_k}]$$

für alle $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n$.

a) Zeige: Sind A_1 und A_2 unabhaengige Ereignisse, so auch A_1^c und A_2, sowie A_1^c und A_2^c. Folgere (z.B. durch Induktion): Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ unabhängige Ereignisse und $B_i \in \{A_i, A_i^C\}$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann sind die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n$ unabhängig.

b) Folgere: Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ unabhängig und $P[A_i] = p \in [0,1]$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann ist die Anzahl $S_n(\omega)$ der eingetretenen Ereignisse binomialverteilt mit Parametern n und p, d.h.

$$P[S_n = k] \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \forall k = 0, 1, \dots n.$$

3. (Law of Averages). Eine unendliche Familie von Ereignissen $A_1, A_2, \dots$ heißt unabhängig falls jede endliche Teilfamilie $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_k}$, $k \geq 1$ und $1 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k$ beliebig, unabhängig ist (s. Aufgabe 2). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Betrachte eine Folge von unabhängigen Ereignissen $A_1, A_2, \dots$ mit $P[A_i] = p \in [0,1]$ für alle $i \geq 1$. Die Anzahl $S_n(\omega)$ der eingetretenen unter den ersten n Ereignissen ist gegeben durch

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(\omega).$$

a) Zeige: Für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$P\left[\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right] \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2p\cdot(1-p)}} \quad \text{und} \quad P\left[\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right] \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2p\cdot(1-p)}}$$

b) Zeige:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p\right] = 1.$$

Hinweis:

$$pe^{\lambda(1-p)} + (1-p)e^{-\lambda p} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}p(1-p)}$$

4. (Das Ruinproblem).

Ein Mann hat sich k Euro für einen Jaguar gespart, der N Euro kostet $(0 < k < N)$. Um den fehlenden Betrag zu gewinnnen, lässt er sich auf folgendes Spiel ein: Er wirft wiederholt eine faire Münze. Erscheint Kopf, dann erhält er einen Euro, kommt hingegen Zahl, so zahlt er einen Euro an die Bank. Er spielt so lange, bis eine der folgenden zwei Möglichkeiten eintritt: Entweder er verliert das ganze Geld, oder er gewinnt genug, um sich den Jaguar leisten zu können. Sei A das Ereignis, dass der Mann alles verliert, und $p_k = P_k[A]$ die Wahrscheinlichkeit dafür zum Startwert k. Zeige:

$$p_k = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1}), \quad 0 < k < N,$$

und löse diese Differenzengleichung zu den Randbedingungen $p_0 = 1$, $p_N = 0$.