Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 9

1. Sei P_p die zum Münzwurfmodell mit Erfolgsparameter $p \in [0,1]$ gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum Ω der binären Folgen $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$, und sei $X_i(\omega) = x_i$. Sei P die durch

$$P[A] \;=\; \int_0^1 P_p[A]\, dp$$

definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω.

a) Sind die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig bezüglich P ?

b) Sei $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Wie verhalten sich die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n} S_n$ unter P ?

2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit *stetiger* Verteilungsfunktion. Seien $E_1 := \Omega$, und, für $n \geq 2$,

$$E_n \;:=\; \{X_n > X_m \;\forall\, m < n\} \;=\; \text{,,ein Rekord wird zur Zeit } n \text{ erreicht''}.$$

Zeige, daß die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots$ unabhängig sind mit $P[E_n] = 1/n$.

3. Eine Münze mit Wahrscheinlichkeit p für ,,Zahl" wird wiederholt geworfen. Sei A_k das Ereignis, daß bei den Würfen $2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$ mindestens k mal in Folge ,,Zahl" fällt. Zeige:

a) $P[A_k \text{ unendlich oft}] \;=\; 0$ falls $p < 1/2$.

b) $P[A_k \text{ unendlich oft}] \;=\; 1$ falls $p \geq 1/2$.

Hinweis zu b): Betrachte die Ereignisse E_i, daß in den k Würfen ab dem $2^k + (i-1)k$–ten Wurf stets Zahl fällt.

4. (Ratenfunktionen für große Abweichungen). Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid Zufallsvariablen mit den unten angegebenen Verteilungen. Berechne jeweils die momentenerzeugenden Funktionen $M(t)$, und skizziere die Graphen von $\Lambda(t) = \log M(t)$, und von der Ratenfunktion $\Lambda^*(a)$. Zeige, daß Λ^* die angegebene Form hat. Erkläre den Verlauf von Λ^* anschaulich.

a) Bernoulliverteilung: $P[X_i = 0] = 1 - p$, $P[X_i = 1] = p$, $p \in (0,1)$.
$\Lambda^*(a) = a \log \frac{a}{p} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-p}$ für $a \in (0,1)$, ∞ für $a \notin [0,1]$.

b) Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$:
$\Lambda^*(a) = \lambda a - 1 - \log(\lambda a)$ für $a > 0$, ∞ für $a \leq 0$.

5. (Satz von Cramér).

a) Gib ein Beispiel einer Verteilung, für die alle Momente endlich sind, aber deren momentenerzeugende Funktion $M(t)$ für alle $t \neq 0$ unendlich ist.

b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid mit $E[X_i] = m$. Formuliere den Satz von Cramér. Seien Λ und $\tilde{\Lambda}$ die logarithmischen momentenerzeugenden Funktionen von X_i bzw. $\tilde{X}_i := X_i - m$. Zeige:

$$\tilde{\Lambda}(t) \;=\; \Lambda(t) - tm\,.$$

In welcher Beziehung stehen die Legendretransformationen Λ^* und $\tilde{\Lambda}^*$? Warum genügt es, den Satz von Cramér für zentrierte Zufallsvariablen zu beweisen ?

Abgabe bis Freitag 19.12., 13 Uhr.