Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 8

1. Angenommen, die Anzahl der Geburten an einem Tag in einem Krankenhaus ist Poissonverteilt mit Parameter λ. Jede Geburt ist ein Junge mit Wahrscheinlichkeit p und ein Mädchen mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$, unabhängig von anderen Geburten (und unabhängig von der Gesamtzahl der Geburten). Seien J und M die Zahl der Jungen bzw. Mädchen.

a) Zeige : $P[J=j, M=m] = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^m}{m!}$.

b) Folgere : J und M sind unabhängig und Poissonverteilt mit Parameter λp bzw. λq.

2. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt mit $\lambda = 1$. Zeige :

a) $\liminf_{n\to\infty} X_n = 0$ P–f.s. b) $\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n - \log n}{\log\log n} = 1$ P–f.s.

3. (Tail events). Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen positiven Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Welche der folgenden Ereignisse sind tail events ?

$$\{X_n > 2n \text{ unendlich oft}\},\ \{\liminf X_n < 17\},\ \{\inf X_n > 5\},$$
$$\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < 1\},\ \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\},\ \{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\}.$$

b) Gib Beispiele von tail–field–meßbaren Zufallsvariablen.

4. (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen). Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeige :

a) Nimmt jedes X_i nur abzählbar viele Werte an, dann sind $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn

$$P[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] \;=\; \prod_{k=1}^{n} P[X_k = a_k] \;\forall\, a_k \in X_k(\Omega)\; (1 \leq k \leq n).$$

b) Allgemein sind $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn

$$P[X_1 \leq c_1, \ldots, X_n \leq c_n] \;=\; \prod_{k=1}^{n} P[X_k \leq c_k] \;\;\forall\, c_k \in \mathbb{R}\; (1 \leq k \leq n).$$

***5. (Rückkehr des random walk zum Startpunkt).**
Sei $S_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \ldots, 2N)$ der random walk auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0, und sei

$$T_0(\omega) \;=\; \min\{n > 0 \,|\, S_n(\omega) = 0\}$$

die erste Rückkehrzeit nach 0 und

$$L(\omega) \;=\; \max\{0 \leq n \leq 2N \,|\, S_n(\omega) = 0\}$$

der Zeitpunkt des letzten Besuchs in 0. Zeige :

$$\begin{aligned} P[T_0 > 2n] &= P[S_{2n} = 0] \qquad\qquad \text{und} \\ P[L = 2n] &= P[S_{2n} = 0] \cdot P[S_{2N-2n} = 0] \;=\; 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2N-2n}{N-n}. \end{aligned}$$