Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 7

1. (Polyas Urnenmodell). Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen, und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei R_n die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$p_{n,r} \ := \ P[R_n = r] \qquad (n \geq 0,\ 1 \leq r \leq n+1\,)$$

a) für $n = 1, 2$ und 3, b) allgemein.

2. (Lebensversicherung etc.). Sei $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine zufällige Lebenszeit (meßbar) mit sukzessiven Überlebenswahrscheinlichkeiten

$$p_n \ = \ P[T \geq n+1 \,|\, T \geq n] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Berechne daraus die Verteilung von T und den Erwartungswert $E[T]$. Welche Verteilung ergibt sich für konstante Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_n \equiv p \in (0, 1)$?

3. $A_1, A_2, \ldots$ sei eine Folge von unabhängigen Ereignissen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[A_n] < 1$ und $P[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = 1$. Zeige :

$$P\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right] \ = \ 1\,.$$

4. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie).
Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta–Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\,.$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$P[X = n] \ = \ \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}\ .$$

Sei E_m das Ereignis „X ist teilbar durch m".

a) Zeige $P[E_m] = m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Zeige, daß die Ereignisse E_p, p Primzahl, unabhängig sind.
(1 ist keine Primzahl!)

c) Berechne $P[\bigcap E_p^c]$, und folgere die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) .$$

d) Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, daß X durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist, beträgt $1/\zeta(2s)$.

*e) *(optional).* Sei Y *unabhängig* von X (*d.h.* $P[Y = m, X = n] = P[Y = m] \cdot P[X = n]$) mit derselben Verteilung, und sei H der größte gemeinsame Teiler von X und Y. Sei B_p das Ereignis, daß X und Y beide durch p teilbar sind. Was hat das Ereignis $\bigcap B_p^c$ mit H zu tun ? Zeige :

$$P[H = n] = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)} .$$

5. (Hölderungleichung). Sei $p \in (1, \infty)$, und sei $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\int |X|^p \, dP \neq 0$. Sei Q die bzgl. P absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Dichte $\rho(\omega) = |X(\omega)|^p / \int |X|^p \, dP$.

a) Formuliere die Jensensche Ungleichung bzgl. Q.

b) Sei $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweise die *Hölderungleichung* :

$$\int |XY| \, dP \leq \left(\int |X|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int |Y|^q \right)^{1/q} \qquad \text{für alle } Y \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

6. (Gleichmäßige Integrierbarkeit). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige :
Konvergiert X_n gegen X in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dann konvergiert X_n gegen X stochastisch, und $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichmäßig integrierbar.