# **Wahrscheinlichkeitstheorie I** WS 03/04 Serie 6

**1. ( Unfaire Münzwürfe und asymmetrischer random walk ).**

a) Eine Münze wird wiederholt geworfen. Bei jedem Wurf fällt ,,Zahl" mit Wahrscheinlichkeit $p$. Seien $K_n$ und $Z_n$ die Anzahlen von ,,Kopf" bzw. ,,Zahl" bei den ersten $n$ Würfen. Zeige für $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n\to\infty} P[2p - 1 - \varepsilon \le \frac{1}{n}(Z_n - K_n) \le 2p - 1 + \varepsilon] \;=\; 1\,.$$

b) Beim asymmetrischen random walk (biassed random walk) $S_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) auf $\mathbb{Z}$ wird vor jedem Bewegungsschritt eine Münze mit Wahrscheinlichkeit $p \neq \frac{1}{2}$ für ,,Zahl" geworfen. Fällt Kopf bzw. Zahl, dann fällt bzw. steigt die Position im nächsten Schritt um eine Einheit. Zeige, daß $S_n$ mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft zum Startpunkt zurückkehrt.

**2. ( Gesetz der großen Zahlen ).** Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E[X_i] = m$ und $\mathrm{var}\,(X_i) = \sigma^2$. Es gelte

$$|\mathrm{cov}\,(X_i, X_j)| \;\le\; r(|i-j|)$$

für eine Funktion $r : \mathbb{N} \to (0, \infty)$. Finde Bedingungen für $r$, also Bedingungen für das ,,Abklingen" der Korrelationen, unter denen immer noch das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right] \;=\; 0 \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{gilt.}$$

**3. ( Unabhängige Zufallsvariablen ).** Zwei Zufallsvariablen $X, Y$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißen *unabhängig* falls für alle $A, B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ gilt :

$$P[X \in A, Y \in B] \;=\; P[X \in A]\, P[Y \in B]\,.$$

a) Zeige : Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt

$$E[f(X)\, g(Y)] \;=\; E[f(X)]\, E[g(Y)]$$

für alle Borel–meßbaren Funktionen $f, g \geq 0$ auf $\mathbb{R}$.
*(Betrachte zunächst den Fall, daß $f$ und $g$ Elementarfunktionen sind.)*

b) Folgere, daß unabhängige Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unkorreliert sind.

c) Gib ein Beispiel für Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.

**4. ( Große Abweichungen für den random walk ).**
Sei $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ der random walk auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0 (s. Vorlesung), und sei $Z(\lambda) := E[e^{\lambda X_i}]$. Zeige für $\lambda > 0$ :

a) $Z(\lambda) \;=\; \cosh \lambda \;\leq\; e^{\lambda^2}/2\,.$

b) $E[e^{\lambda S_n}] \;=\; Z(\lambda)^n\,.$

c) $P\left[\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right] \;\leq\; e^{-(\lambda\varepsilon - \log Z(\lambda))n}$ für alle $\varepsilon > 0$.

d) $P\left[\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right] \;\leq\; e^{-\varepsilon^2 n/2}\,.$

Die Wahrscheinlichkeit, daß $\frac{S_n}{n}$ vom Erwartungswert 0 um mehr als $\varepsilon$ abweicht („*große Abweichung*"), geht also exponentiell schnell gegen 0.

**5. ( Gleichmäßige Integrierbarkeit ).** Zeige, daß eine Familie $\{X_i \mid i \in I\}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gleichmäßig integrierbar ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist :

a) *Integrierbare Majorante :* Es existiert $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$|X_i| \;\leq\; Y \qquad \forall\, i \in I\,.$$

b) $\mathcal{L}^p$*–Beschränktheit* für $p > 1$ : Es existiert $p > 1$ mit

$$\sup_{i \in I} E[|X_i|^p] \;<\; \infty\,.$$

c) Warum ist $\mathcal{L}^1$–Beschränktheit **nicht** hinreichend für gleichmäßige Integrierbarkeit ?