Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 5

1. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige 0-1-Experimente auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $P[X_i = 1] = p$, $p \in (0,1]$. Sei

$$T(\omega) \;=\; \min\{k \in \mathbb{N} | \, X_k(\omega) = 1\}$$

die Wartezeit auf den ersten Erfolg. Zeige, daß T eine Zufallsvariable ist, und berechne den Erwartungswert und die Varianz.

2. (Von stochastischer zu fast sicherer Konvergenz).
Formuliere und beweise das 1. Borel-Cantelli-Lemma. Seien X, X_n $(n \in \mathbb{N})$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeige :

a) Gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] \;<\; \infty \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0\,,$$
dann konvergiert X_n P–fast sicher gegen X.

b) Konvergiert X_n stochastisch gegen X, dann existiert eine Teilfolge X_{n_k} mit $X_{n_k} \to X$ P–fast sicher.

3. (Gaußsche Zufallsvariablen). Die *Normalverteilung (Gaußverteilung)* mit Parametern $m \in \mathbb{R}, v > 0$, ist das Maß $\mu_{m,v}$ auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$ mit Dichte

$$f_{m,v}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}}$$

bezüglich des Lebesguemaßes *(Skizze ?)*

a) Zeige, daß $\mu_{m,v}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, und berechne den Erwartungswert und die Varianz. *(* $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,dx = \sqrt{2\pi}$ *)*

b) Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion F, und seien $\sigma > 0, b \in \mathbb{R}$. Welche Verteilungsfunktion hat die Zufallsvariable
$$Y \;:=\; \sigma X + b \quad ?$$

c) Welche Verteilung hat Y falls X $\mu_{0,1}$–verteilt ist ?

4. (Ballot theorem).

a) Wir betrachten den random walk mit Start in 0. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_a(\omega) \;=\; \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, S_n(\omega) = a\}\,.$$

Insbesondere ist T_0 die *erste Rückkehrzeit zum Startpunkt.* Zeige für $a > 0$:

$$P[\,T_0 > n \text{ und } S_n = a\,] \;=\; P[\,T_a = n\,] \;=\; \frac{a}{n}\,P[\,S_n = a\,]\,.$$

(Die Aussage von Aufgabe 4 vom letzten Blatt kann vorausgesetzt werden).

b) Bei einer Wahl erhält Kandidat A α Stimmen, und Kandidat B β Stimmen, $\alpha > \beta$. Angenommen, die Stimmen werden in ,,völlig zufälliger" Reihenfolge ausgezählt. Zeige : Die Wahrscheinlichkeit, daß A während der Stimmenauszählung stets in Führung liegt, ist $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

5. (Berechnung von Erwartungswerten aus der Verteilung). Sei $T \geq 0$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Beweise ohne Verwendung des Satzes von Fubini, daß $x \mapsto P[T > x]$ Borel–meßbar ist mit

$$E[T] \;=\; \int_0^\infty P[T > x]\,dx\,.$$

Hinweis : Betrachte zunächst den Fall, daß T nur endlich viele Werte $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_k$ annimmt. Zeige

$$E[T] \;=\; \sum_{i=1}^{k}(c_i - c_{i-1})\,P[T \geq c_i] \;=\; \int_0^\infty P[T > x]\,dx\,.$$

6. (Faktorisierungslemma).

a) $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(S, \mathcal{S})$ seien meßbare Räume, und X eine meßbare Abbildung von Ω nach S. Zeige, daß sich jede $\sigma(X)$ meßbare Zufallsvariable Y auf die Form

$$Y \;=\; h(X)$$

mit einer meßbaren Funktion $h : S \to \overline{\mathbb{R}}$ bringen läßt.

b) Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen, und sei

$$\mathcal{F}_n \;=\; \sigma(X_1, \ldots, X_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Die Ereignisse in $\mathcal{F}_n$ repräsentieren die bis zur Zeit n verfügbare ,,Information" über $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Zeige: Die $\mathcal{F}_n$–meßbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ sind genau die Funktionen vom Typ

$$Y \;=\; f(X_1, \ldots, X_n)\,, \qquad f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \text{ Borel–meßbar.}$$