Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 4

1. (Dichten für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen).

Seien $$P[A] \;=\; \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad \text{und} \qquad Q[A] \;=\; \sum_{\omega \in A} q(\omega)\;, \qquad A \in \mathcal{P}(\Omega)\,,$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einer abzählbaren Menge Ω. Zeige, daß P genau dann eine Dichte ρ bzgl. Q hat, wenn P in folgendem Sinn *absolutstetig* bzgl. Q ist:

$$\forall\, \omega \in \Omega : \qquad q(\omega) = 0 \;\Rightarrow\; p(\omega) = 0\;.$$

In diesem Fall gilt

$$\rho(\omega) \;=\; \frac{p(\omega)}{q(\omega)} \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega \text{ mit } q(\omega) \neq 0.$$

2. (Simulation von Zufallsvariablen). Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion einer **reellwertigen** Zufallsvariable Xauf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Zeige : F ist monoton wachsend und rechtsstetig mit

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) \;=\; 1\;.$$

b) Sei $\lambda_{(0,1)}$ die Gleichverteilung auf $(0,1)$. Wie sieht der Graph von F aus, falls die Verteilung von X gleich $\frac{1}{2}\lambda_{(0,1)} + \frac{1}{2}\delta_2$ ist ?

c) Für $u \in (0,1)$ sei

$$\tilde{X}(u) \;:=\; \inf\{x \in \mathbb{R} | \, F(x) \geq u\} \;=\; \sup\{x \in \mathbb{R} | \, F(x) < u\}$$

die „linksstetige verallgemeinerte Inverse” von F. Skizziere $\tilde{X}$ für das Beispiel aus b). Zeige, daß $\tilde{X}$ eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda_{(0,1)})$$

ist, die dieselbe Verteilung wie X unter P hat.

(Ein Element $\omega \in (0,1)$ repräsentiert z.B. eine vom Computer erzeugte ,,Zufallszahl". Dies liefert eine Möglichkeit, die Zufallsvariable X auf dem Computer zu simulieren. Welche Probleme könnten dadurch entstehen, daß vom Computer erzeugte Zufallszahlen nie wirklich zufällig sind, sondern durch einen deterministischen Algorithmus generiert werden ? Für welche Arten von Verteilungsfunktion könnte es insbesondere Probleme geben ?)

3. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unkorrelierte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 $(m, \sigma \in \mathbb{R})$. Sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Zeige:

$$\operatorname{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

b) Für alle $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\varepsilon > 0$ gilt :

$$\operatorname{var}(Y) \;\geq\; \varepsilon^2 \cdot P\left[|Y - E[Y]| \geq \varepsilon\right].$$

c) $\frac{S_n}{n}$ konvergiert stochastisch gegen m, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right] \;=\; 0 \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

4. (Random walk). Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{\omega = (x_1, \ldots, x_N) |\, x_i \in \{-1, +1\}\}$ und $X_i(\omega) = x_i$. Wir interpretieren

$$S_n \;=\; X_1 + \ldots + X_n \qquad (n = 0, 1, \ldots, N)$$

als die zufällige Bewegung eines Teilchens auf $\mathbb{Z}$ mit Start in 0 (*random walk*). Für $a \in \mathbb{N}$ sei

$$T_a \;=\; \min\{n > 0 |\, S_n = a\}$$

der Zeitpunkt des ersten Besuchs in a. Zeige :

a) Für jedes $c > 0$ gilt :

$$P[S_n = a - c,\, T_a \leq n] \;=\; P[S_n = a + c] \qquad \text{„Reflektionsprinzip".}$$

*b) Für die Verteilung von T_a gilt:

$$\begin{aligned} P[T_a \leq n] &= P[S_n \notin [-a, a-1]]\,, \\ P[T_a = n] &= \frac{1}{2}(P[S_{n-1} = a-1] - P[S_{n-1} = a+1]) \;=\; \frac{a}{n} P[S_a = n]\,. \end{aligned}$$

Hinweis : $\frac{1}{2}(P[S_{n-1} = a-1] + P[S_{n-1} = a+1]) = P[S_n = a]$.

5. (Darts). Ein Spieler wirft mit Pfeilen auf eine Dartsscheibe. Der Auftreffpunkt sei durch die absolutstetige Verteilung

$$P[B] \;=\; \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_B e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}}\, \lambda(dx)\,, \qquad \sigma > 0,$$

auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ beschrieben.

a) Sei $R(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ der Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe. Zeige

$$P[R > r_0] \;=\; \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}) \qquad \text{für alle } r_0 \in \mathbb{R},$$

und berechne den Erwartungswert von P.

b) Sei $T = X^{-1}$, wobei $X : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$X(r, \varphi) \;=\; (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

die Transformation auf Polarkoordinaten ist. Die Komponenten R und Φ von T geben also den Abstand vom Nullpunkt und den Polarwinkel an. Zeige, daß das Bildmaß $P \circ T^{-1}$ (also die gemeinsame Verteilung von R und Φ) eine Dichte bzgl. des zweidimensionalen Lebesguemaßes hat, und berechne diese.