Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 3

1. Sei P die Gleichverteilung auf der Menge Ω der Permutationen von $\{1,\dots,n\}$. Für eine Permutation ω bezeichne $X(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte. Berechne den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; E[X^2] - E[X]^2 \;.$$

Hinweis: $X = \sum_{i=1}^{n} I_{\{\omega\in\Omega|\omega(i)=i\}}$.

2. Sei Z eine Zufallsvariable, die nur die Werte $0,1,2,\dots$ annimmt. Zeige:

$$E[Z] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P[Z>n]\,.$$

3. (Absolutstetige Verteilungen).

a) Sei $\rho:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ Lebesgue–integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}}\rho(x)\,\lambda(dx)=1$, und sei

$$P[A] \;=\; \int_A \rho(x)\,\lambda(dx)$$

die absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit Dichte ρ. Zeige, daß der Erwartungswert einer Zufallsvariablen $T\geq 0$ bzgl. P durch

$$E[T] \;=\; \int T(x)\,\rho(x)\,\lambda(dx)$$

gegeben ist.

b) Die *Exponentialverteilung mit Parameter* λ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_λ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte

$$\rho_\lambda(x) \;=\; \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\cdot I_{(0,\infty)}(x)\,.$$

Berechne die Verteilungsfunktion

$$F_\lambda(c) \;=\; P_\lambda[(-\infty,c]]\,, \qquad c\in\mathbb{R}\,,$$

und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $T(x) := x$.

(Bemerkung: Die Exponentialverteilung tritt u.a. auf bei der Modellierung zufälliger Zeitpunkte, z.B. Ankunftszeit des nächsten Kunden in einer Warteschlange, Zeit des nächsten Atomzerfalls in einer radioaktiven Substanz, ...)

4. (Einschluß–/Ausschlußprinzip).
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Zeige

$$I_{\bigcup A_i} \; = \; 1 \; - \; \prod (1 - I_{A_i}) \,,$$

und folgere

$$P\left[\bigcup A_i\right] \; = \; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P\left[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right] \,.$$

5. (Konvergenzsätze).
Seien $X_1, X_2, \dots$ Zufallvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und sei $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Beweise das *Lemma von Fatou* :

$$X_n \ge Y \;\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad E[\liminf_{n\to\infty} X_n] \; \le \; \liminf_{n\to\infty} E[X_n] \,.$$

b) Folgere den *Satz von Lebesgue* : Konvergiert die Folge X_n P–fast sicher, dann gilt :

$$|X_n| \le Y \;\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad E[\lim_{n\to\infty} X_n] \; = \; \lim_{n\to\infty} E[X_n] \,.$$