Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 2

1. (Überbuchungen).

Fluggesellschaften stellen fest, daß ein Passagier, der einen Platz reserviert hat, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ nicht kommt. Daher verkauft Lyanair immer 100 Tickets für ein Flugzeug mit 95 Plätzen. Berechne die Überbuchungswahrscheinlichkeit p unter der Annahme, daß die einzelnen Passagiere unabhängig voneinander kommen oder wegbleiben. Leite sowohl eine exakte als auch eine näherungsweise Formel für p her, und schätze den numerischen Wert ungefähr ab.

2. Wir betrachten das Modell für unendlich viele faire Münzwürfe aus der Vorlesung.

a) Zeige :

$$P\,[\,\{\omega = (x_1, x_2, \ldots) \in \Omega \,|\, x_i = 1 \text{ unendlich oft}\}\,] \;=\; 1\,.$$

*b) Allgemeiner sei $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ eine beliebige endliche Sequenz von Nullen und Einsen. Zeige, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 das „Wort" $(a_1, \ldots, a_k)$ unendlich oft in der Münzwurffolge $\omega = (x_1, x_2, \ldots)$ vorkommt.

3. (σ–Additivität und monotone Stetigkeit).

Sei $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra.

a) Zeige, daß eine additive Abbildung $P : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ genau dann σ–additiv ist, wenn gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P[A_n] \;=\; P[\bigcup A_n]\,.$$

b) Gilt $P[\Omega] = 1$, dann ist die σ–Additivität von P auch äquivalent zur $\emptyset$*–Stetigkeit* :

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \text{ mit } \bigcap A_n = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P[A_n] \;=\; 0\,.$$

4. (Bonferroni's Ungleichung). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$. Zeige :

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} P\left[A_i\right] \;-\; \sum_{1 \leq i < j \leq k} P\left[A_i \cap A_j\right] \;.$$

In jeder Packung Corn Flakes befindet sich eins der Abziehbilder von n verschiedenen Fußballspielern, darunter 11 Nationalspieler. Wer die Bilder aller 11 Nationalspieler gesammelt hat, gewinnt eine Reise zur Europameisterschaft. Um die Reise auf jeden Fall zu gewinnen, kauft Fred Feuerstein $3n$ Packungen. Zeige, daß die Wahrscheinlichkeit, tatsächlich die gewünschten Bilder zu erhalten, zwischen $1-11\cdot(1-\frac{1}{n})^{3n}$ und $1-11\cdot(1-\frac{1}{n})^{3n}+55\cdot(1-\frac{2}{n})^{3n}$ liegt. Welchen Wert haben diese Schranken ungefähr für große n ?

5. Die *hypergeometrische Verteilung* mit Parametern N, K, n ist durch die Gewichte

$$p(k) \;=\; \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} \;, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

gegeben, vgl. Übung 1 vom ersten Übungsblatt. Zeige :

Für $N \to \infty$ und $K \to \infty$ mit $p = \frac{K}{N}$ konstant konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern n, p.