Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 13

1. (Gesetz der großen Zahlen via charakteristische Funktionen).
WICHTIGE ÜBUNG !

a) Beweise *mithilfe von charakteristischen Funktionen* die folgende Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen : Sind $X_1, X_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_i] = m$, dann konvergiert die Verteilung von $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ schwach gegen das Diracmaß δ_m.

b) Folgere hieraus, daß $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ auch stochastisch gegen m konvergiert.

2. $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien unabhängig und identisch verteilt mit $E[X_i] = 0$ und $\operatorname{var}(X_i) > 0$. Sei $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Zeige :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \qquad P\text{–f.s.}$$

(Der zentrale Grenzwertsatz kann vorausgesetzt werden).

3. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X : \Omega \to (0, \infty)$ und $Y : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit gemeinsamer Verteilung $\mu_n(dx)p(x, dy)$, wobei μ_n die $\Gamma(1, n)$ Verteilung ist, und $p(x, \cdot)$ die Poissonverteilung mit Parameter x. Mit anderen Worten : X ist $\Gamma(1, n)$ verteilt, und, gegeben $X = x$, hat Y Poissonverteilung mit Parameter x.

a) Berechne die charakteristische Funktion von Y.

b) Zeige, daß die Verteilung von

$$\frac{Y - E[Y]}{\sqrt{\operatorname{var}(Y)}}$$

für $n \to \infty$ schwach gegen $N(0, 1)$ konvergiert.

c) Warum hätte man dies auch aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes vermuten (aber nicht so leicht beweisen) können ?

4. (Satz von Slutsky). Seien X_n, Y_n, X und Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ in Verteilung.

a) Demonstriere anhand eines Beispiels, daß $X_n + Y_n$ nicht notwendig in Verteilung gegen $X + Y$ konvergiert.

b) Zeige, daß diese Konvergenz gilt, wenn Y konstant ist.

5. (Letzte Besuchszeit des random walk). Die letzte Besuchszeit L_N in 0 des random walk S_n, $0 \leq n \leq 2N$, mit Start in 0 hat die Verteilung

$$P[L_N = 2n] \; = \; 2^{-2N} \binom{2n}{n} \binom{2N-2n}{N-n},$$

s. Aufgabe 5 von Blatt 8. Zeige, daß die Verteilung von $\frac{L_N}{2N}$ für $n \to \infty$ schwach gegen die Arkussinusverteilung mit Dichte

$$f(x) \; = \; \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

und Verteilungsfunktion

$$F(x) \; = \; \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \qquad \text{konvergiert.}$$