Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 12

Abgabe bis Freitag 23.1.04, 12 Uhr.

1. (Charakteristische Funktionen).

a) Die *Doppelexponentialverteilung* ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Zeige : Die charakteristische Funktion von μ ist $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

b) Folgere, daß $\varphi(t) = e^{-|t|}$ die charakteristische Funktion der Cauchyverteilung ist (Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$).

c) Zeige : Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Cauchyverteilte Zufallsvariablen, dann sind die empirischen Mittelwerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$, auch Cauchyverteilt. Warum ist dies kein Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen ?

2. (Absolute und relative Dichten).
Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen μ und ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$ seien absolutstetig bzgl. λ mit Dichten f und g.

a) In welchem Sinne ist die Dichte f eindeutig festgelegt ?

b) Wann ist μ absolutstetig bzgl. ν, und wie sieht dann die (relative) Dichte aus ?

3. (Importance sampling). Sei $(S, \mathcal{S}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Wir wollen das Integral

$$I \;:=\; \int h(x)\,\mu(dx)$$

näherungsweise berechnen. Die einfache Monte Carlo Methode benutzt

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i(\omega)) \qquad P\text{–f.s.},$$

wobei $X_1, X_2, \ldots$ iid mit Verteilung μ. Sie versagt, falls wir kein effektives Verfahren zum Samplen von μ haben, oder falls die Varianz von h bzgl. μ zu groß ist.

Alternativ sei μ absolutstetig mit Dichte ρ bzgl. einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ν auf $(S, \mathcal{S})$, von der wir Stichproben erzeugen können. Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ iid mit Verteilung ν, und sei

$$I_n \;:=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(Y_i)\rho(Y_i) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeige :

a) $E[I_n] = I$.

b) $I_n(\omega) \to I$ P–fast sicher.

c) Ist ρ beschränkt und $h \in \mathcal{L}^2(\mu)$, dann gilt

$$E[(I_n - I)^2] \;=\; \frac{1}{n}\,\mathrm{var}_\nu\,(h\rho)\,.$$

*d) Wie kann man die sich hieraus ergebende Monte Carlo Methode modifizieren, wenn wir die Dichte ρ nur bis auf eine Normierungskonstante kennen (d.h. $\rho(x) = \frac{1}{Z}\tilde{\rho}(x)$ wobei $\tilde{\rho}$ bekannt ist, aber die Konstante $Z > 0$ nicht) ?

4. (Ruinwahrscheinlichkeiten für den random walk II).
Seien P_x, $x \in \mathbb{Z}$, Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Die Zufallsvariablen $S_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ seien unabhängig bzgl. P_x für jedes x mit $P_x[S_0 = x] = 1$ und $P_x[X_i = +1] = P_x[X_i = -1] = \frac{1}{2}$. Dann ist

$$S_n \;:=\; S_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

bzgl. P_x ein random walk mit Start in x. Sei $\lambda \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{Z}$ mit $0 \le x \le \lambda$ sei

$$p(x) \;:=\; P_x[\,S_n \text{ erreicht } 0 \text{ vor } \lambda\,]$$

die Wahrscheinlichkeit für Ruin vor Erreichen von λ bei Start in x. Die folgende Methode liefert einen alternativen Beweis für die auf dem letzten Zettel bewiesene Formel für $p(x)$:

a) Begründe anschaulich (ohne Verwendung von Aufgabe 11.4), warum p die Differenzengleichung

$$p(x) \;=\; \frac{1}{2}\,p(x+1) \;+\; \frac{1}{2}\,p(x-1)\,, \qquad 0 < x < \lambda,$$

bzw. (äquivalent)

$$(p(x+1) - p(x)) - (p(x) - p(x-1)) \;=\; 0 \tag{1}$$

mit Randbedingungen

$$p(0) = 1 \;\text{ und }\; p(\lambda) = 0 \qquad \text{löst.}$$

b) Zeige: Die allgemeine Lösung von (1) ist

$$p(x) \;=\; cx + d \qquad \text{mit } c, d \in \mathbb{R}.$$

Folgere $p(x) = (\lambda - x)/\lambda$ (vgl. Aufgabe 11.4).

Bemerkung: Der Zugang über Stoppen des Prozesses beim Austritt aus $(0, \lambda)$ *(s. Aufgabe 11.4) funktioniert allgemein für* **Martingale***, der Zugang über Differenzengleichungen funktioniert allgemein für* **Markovsche Ketten***, s. Wahrscheinlichkeitstheorie II. Der random walk ist sowohl ein Martingal als auch eine Markovsche Kette.*