Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 11

Abgabe bis Freitag 16.1.04, 12 Uhr.

1. Beschreibe Algorithmen, um Stichproben von den Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $[0,1]$ mit folgenden Dichten zu erzeugen :

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(Arkussinusverteilung)}$$

$$\text{b)} \quad g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

2. Sei $T : \Omega \to \{0,1,2,\ldots\}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P[T = n \,|\, T \geq n] \;=:\; p_n \;, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

(z.B. erste Ausfallzeit einer Maschine mit Ausfallwahrscheinlichkeiten p_n).
Zeige : Sind U_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, dann hat

$$\tilde{T} \;:=\; \min\{n \geq 0 \,|\, U_n \leq p_n\}$$

dieselbe Verteilung wie T.

3. (Konstruktion von Markovschen Ketten). Seien $\mu(dx)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und $p(x,dy)$ ein stochastischer Kern auf einem endlichen Raum S mit σ–Algebra $\mathcal{S} := \mathcal{P}(S)$.

a) Definiere, was eine Markovsche Kette mit Startverteilung μ und Bewegungsgesetz p ist.

b) Konstruiere induktiv Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_n auf $S^{n+1} = \{(x_0,x_1,\ldots,x_n)|x_i \in S\}$, $n \geq 0$, so daß der Koordinatenprozeß $X_i : S^{n+1} \to S$,

$$X_i(\,(x_0,x_1,\ldots,x_n)\,) \;:=\; x_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

unter P_n eine solche Markovsche Kette ist.

c) Beschreibe einen Algorithmus zur Simulation dieses Prozesses.

4. (Ruinwahrscheinlichkeit). Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P[X_i = +1] = P[X_i = -1] = \frac{1}{2}$, und sei

$$S_n \;=\; x_0 \;+\; \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (n \geq 0)$$

der random walk auf $\mathbb{Z}$ mit Start in x_0. Für $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda > x_0$, sei

$$T(\omega) \;:=\; \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, S_n(\omega) \notin (0, \lambda)\}$$

die erste Austrittszeit aus $(0, \lambda)$.

a) Zeige: $E[S_T] \;=\; x_0\,.$ *(Hinweis: $S_T = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot I_{\{T \geq i\}}$.)*

b) Folgere:

$$P[S_T = 0] \;=\; 1 - P[S_T = \lambda] \;=\; \frac{\lambda - x_0}{\lambda}$$

(Wahrscheinlichkeit, daß beim Startkapital x_0 der Ruin des Spielers vor Erreichen des Levels λ eintritt).

5. (Maxwells Geschwindigkeitsverteilung). Die Komponenten der Geschwindigkeit $v = (v_1, v_2, v_3)$ eines Moleküls in einem idealen Gas seien unabhängig und $N(0, \sigma^2)$ verteilt. Berechne die Verteilung von

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Hinweis: Berechne zuerst die Verteilung von v_i^2, dann die Verteilung von $|v|^2$.