Wahrscheinlichkeitstheorie I WS 03/04 Serie 10

Abgabe bis Freitag 9.1.04, 12 Uhr.

1. (Produktdichten).

a) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit absolutstetigen Verteilungen

$$P[X_i \in B] \; = \; \int_B f_{X_i}(x)\,dx\,, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zeige: Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_n$ ist absolutstetig bzgl. $\lambda(\mathbb{R}^n)$ mit Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) \; = \; \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)\,.$$

b) Umgekehrt seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung absolutstetig mit einer Dichte in Produktform ist:

$$f(x_1, \dots, x_n) \; = \; \prod_{i=1}^n f_i(x_i)\,, \qquad f_i : \mathbb{R} \to [0, \infty) \text{ meßbar.}$$

Zeige: $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig, und die Verteilungen sind absolutstetig mit Dichten

$$f_{X_i} \; = \; f_i \Big/ \int_{\mathbb{R}} f_i\,dx\,, \qquad 1 \le i \le n.$$

2. Seien X und Y unabhängig exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Bestimme die gemeinsame Verteilung von $U := X + Y$ und $V := \frac{X}{X+Y}$. Folgere, daß V auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist.

3. (Summen von unabhängigen Zufallsvariablen).
Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Verteilung μ bzw. ν. Zeige:

a) $P[X + Y \in B] \; = \; \int \mu(dx)\,\nu(B - x) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$

b) Sind μ und ν absolutstetig bzgl. $\lambda(\mathbb{R})$ mit Dichte f bzw. g, dann ist die Verteilung von $X+Y$ absolutstetig mit Dichte

$$f * g(z) \ := \ \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(z-t)\, dt\,.$$

c) Sind X und Y $N(0,1)$ verteilt, dann ist $X+Y$ $N(0,2)$ verteilt.

4. (Gammaverteilung). Sei $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx$ $(r > 0)$ die *Eulersche Gammafunktion.* Insbesondere gilt $\Gamma(r+1) = r \cdot \Gamma(r)$ und damit $\Gamma(n) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Verteilung auf $\mathbb{R}^+$ mit Dichte

$$f(x) \ = \ \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1}\, e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0)$$

heißt *Gammaverteilung mit Parametern* $\lambda, r > 0$. Zeige:

a) Sind X und Y unabhängig und $\Gamma(\lambda, r)$ bzw. $\Gamma(\lambda, s)$ verteilt, dann ist $X+Y$ $\Gamma(\lambda, r+s)$ verteilt.

b) Sind $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. exponentialverteilt mit Parameter λ, dann ist $X_1 + \cdots + X_n$ $\Gamma(\lambda, n)$ verteilt.

(Die Aussage von Aufgabe 3 kann vorausgesetzt werden.)

5. (Ehrenfestmodell). In zwei Urnen liegen Kugeln. Aus der Gesamtzahl der Kugeln beider Urnen wird eine Kugel zufällig herausgegriffen. Die gezogene Kugel wird dann aus ihrer Urne herausgenommen, und in die andere Urne gelegt.

a) Beschreibe den Vorgang durch eine Übergangswahrscheinlichkeit $p(\cdot,\cdot)$ auf der Menge $S := \mathbb{Z}_+^2$ aller Paare (k_1, k_2) von nichtnegativen ganzen Zahlen.

b) Sei μ die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S mit den Gewichten

$$\mu(k_1, k_2) \ = \ e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^{k_1}}{k_1!}\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^{k_2}}{k_2!}\,.$$

Sei X_i $(i = 1, 2)$ die Zahl der Kugeln, die in der Urne i liegen; bezüglich μ sind X_1, X_2 also unabhängige Poissonverteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ. Zeige, daß μ eine invariante Verteilung für die durch $p(\cdot, \cdot)$ beschriebene Dynamik ist.

c) Was kann man sagen, wenn die Gesamtzahl N aller Kugeln bekannt ist ?

6. (Hoeffdingungleichung).
Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X_i] = m$. Es gelte

$$A \;\leq\; X_i \;\leq B \qquad \forall\, \omega \in \Omega,\; 1 \leq i \leq n\,.$$

mit endlichen Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei P_t die bzgl. P absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichte

$$\rho_t(\omega) \;=\; e^{tX_1}(\omega) \big/ E[e^{tX_1}]\ . \qquad\qquad \text{Zeige:}$$

a) Die logarithmische momentenerzeugende Funktion $\Lambda(t)$ der X_i ist zweimal differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= E_{P_t}[X_1] && (\text{ Erwartungswert von } X_1 \text{ bzgl. } P_t \text{), und} \\ \Lambda''(t) &= \mathrm{var}_{P_t}[X_1] && (\text{ Varianz von } X_1 \text{ bzgl. } P_t \text{).} \end{aligned}$$

b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Lambda''(t) \;\leq\; \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \Lambda(t) \;\leq\; mt + \frac{(B-A)^2}{8}\, t^2\,.$$

c) Für die großen Abweichungen vom Gesetz der großen Zahlen ergibt sich folgende obere Schranke (*Hoeffding 1963*):

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq m + \varepsilon\right] \;\leq\; e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(B-A)^2}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0.$$