Wahrscheinlichkeitstheorie II Blatt 5

1. (Stoppsatz für Supermartingale). Sei X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ein Supermartingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)$, und sei C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine previsible Folge von beschränkten, nichtnegativen Zufallsvariablen.

a) Wie ist das diskrete stochastische Integral $C \bullet X$ definiert ? Zeige, daß $C \bullet X$ wieder ein Supermartingal ist.

b) Formuliere und beweise einen Stoppsatz für Supermartingale.

2. (Ruinproblem). Sei $x \in \mathbb{Z}$ und $p \in (0, 1)$, $p \neq \frac{1}{2}$. Wir betrachten den random walk $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, Y_i $(i \geq 1)$ i.i.d. mit $P[Y_i = +1] = p$, $P[Y_i = -1] = q := 1 - p$.

a) Zeige, daß folgende Prozesse Martingale sind:

$$M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, \qquad N_n := S_n - n(p - q)\,.$$

b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0 < b$ sei $T := \min\{n \geq 0 \mid S_n \notin (a, b)\}$. Zeige

$$P[X_T = a] = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}} \qquad \text{und}$$

$$E[T] = \frac{b}{p - q} - \frac{b - a}{p - q} \cdot \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a}}\,.$$

3. (ABRAKADABRA). Zu jeder der Zeiten $1, 2, 3, \ldots$ tippt ein Affe einen zufälligen Buchstaben auf einer Schreibmaschine. Die Folge der Buchstaben bilde eine i.i.d. Folge von auf $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Wie lange dauert es im Mittel, bis der Affe das Wort ,,ABRAKADABRA getippt hat ?

Anleitung: Ein Spieler startet zu jedem der Zeitpunkte $n = 1, 2, \ldots$ eine mehrstufige Wette der folgenden Bauart: Er setzt 1 Euro darauf, daß der n–te Buchstabe ein A ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er die erhaltenen 26 Euro darauf, daß der $(n+1)$–te Buchstabe ein B ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er seinen Gewinn von 26^2 Euro darauf, daß der $(n+2)$–te Buchstabe ein R ist, usw.

Sei T die erste Zeit, zu der der Affe die Folge „ABRAKADABRA" reproduziert hat.

a) Erkläre anschaulich, warum

$$E[T] \;=\; 26^{11} + 26^4 + 26$$

gelten sollte.

b) Beweise dies rigoros.

4. Sei $p(x, y)$ $(x, y \in S)$ eine stochastische Matrix auf einem abzählbaren Zustandsraum S, und sei $(X_n)_{n \geq 0}$ bzgl. P_x die kanonische Markovkette mit Start in x und Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x, y)$. Für $y \in S$ sei

$$T_y \;:=\; \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = y\}\,.$$

(BEACHTE: $n \geq 1$ und nicht $n \geq 0$!)

a) Folgere aus dem Stoppsatz: Gilt

$$P_x[T_y < \infty] \;=\; 1 \qquad \forall\, x, y \in S\,,$$

dann ist jede nichtnegative superharmonische Funktion h auf S konstant.

b) Sei $y \in S$. Zeige: Für die Funktion

$$h(x) \;:=\; P_x[T_y < \infty]$$

gilt

$$h(x) \;=\; \sum_{z \neq y} p(x, z) h(z) \;+\; p(x, y) \;\geq\; \sum_{z} p(x, z) h(z)\,.$$

c) Folgere, daß auch die Umkehrung der Aussage von a) richtig ist.

5. (Murphy's law).

[Alles was eine realistische Chance hat zu passieren, wird auch passieren — eher früher als später.]

Sei T eine Stoppzeit. Es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$P\left[T \leq n+k \,|\, \mathcal{F}_n\right] \;>\; \varepsilon \qquad P\text{–f.s. für alle } n \geq 0.$$

Zeige durch Induktion

$$P[T > ik] \;\leq\; (1-\varepsilon)^i\,,$$

und folgere $E[T] < \infty$.

6. (Verzweigungsprozesse). Sei Z_n der Verzweigungsprozeß aus der Vorlesung mit $Z_0 = 1$. Zeige:

a) Für $s \in [0,1]$ ist s^{Z_n} genau dann ein Martingal, wenn $G(s) = s$ gilt.

b) Im kritischen Fall ($m = 1$) stirbt der Prozeß abgesehen von einem Ausnahmefall (welchem ?) P–fast sicher aus.

c) Die Wahrscheinlichkeit $\tilde{\pi} := P[M_\infty = 0]$ erfüllt $\tilde{\pi} = G(\tilde{\pi})$.