Wahrscheinlichkeitstheorie II Blatt 4

1. (Martingaldefinition). Zeige:

a) Ein previsibles Martingal ist P–f.s. konstant.

b) Für ein nichtnegatives Martingal $(X_n)_{n\geq 0}$ gilt P–fast sicher:

$$X_n(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_{n+k}(\omega) = 0 \text{ für alle } k \geq 0.$$

2. Konstruiere ein Martingal X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ mit

$$E[X_n] = 0 \text{ für alle } n, \qquad \text{aber} \qquad X_n \to -\infty \ P\text{–f.s.}$$

3. (Stoppsatz). Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ eine Filtration. Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit* falls $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.

a) Beweise durch Induktion: Ist X_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ein Martingal, und T eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, dann gilt

$$E[X_{T\wedge n}] \ = \ E[X_0] \qquad \forall\, n \geq 0\,.$$

b) Unter welchen Voraussetzungen folgt

$$E[X_T] \ = \ E[X_0] \qquad ?$$

4. (Martingale des random walk). Sei

$$X_n \;=\; x + S_n\,, \qquad S_n \;=\; Y_1 + \ldots + Y_n\,, \qquad Y_i \text{ i.i.d. mit } P[Y_i = \pm 1] = \frac{1}{2},$$

der klassische random walk mit Start in $x \in \mathbb{Z}$.

a) Zeige, daß die folgenden Prozesse Martingale sind:

(i) X_n, (ii) $M_n := X_n^2 - n$ (iii) $M_n^\lambda := e^{\lambda X_n - a(\lambda) n}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$,

wobei $a(\lambda) := \log\cosh\lambda$.

b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < x < b$ sei

$$T(\omega) \;:=\; \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n(\omega) \notin (a,b)\}\,.$$

Zeige durch Anwenden des Stoppsatzes (s. Aufgabe 3) auf das Martingal X_n:

$$P[X_T = a] \;=\; \frac{b-x}{b-a}\,.$$

c) Leite eine Formel für $E[T]$ her.

5. (Submartingale).

a) Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_n)$. Zeige: Ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex mit $u(X_n) \in \mathcal{L}^1\ \forall\, n$, dann ist $u(X_n)$ ein Submartingal.

b) Zeige: Jedes Submartingal $(X_n)_{n\geq 0}$ besitzt eine Zerlegung

$$X_n \;=\; M_n + A_n$$

in ein Martingal (M_n) und einen P-fast sicher monoton wachsenden, previsiblen Prozeß (A_n).