## Wahrscheinlichkeitstheorie II    Blatt 3

**1. ( Bayessche Formel ).** Formuliere die Bayessche Formel für absolutstetige Zufallsvariablen. Seien $T$ und $S$ unabhängig exponentialverteilt mit Parametern $\lambda$ bzw. $\mu$, und sei $V = T + S$. Berechne die bedingte Verteilung von $T$ gegeben $V$. Vergleiche die Ergebnisse für $\mu < \lambda$, $\mu > \lambda$ und $\mu = \lambda$.

**2.** Seien $X_0, X_1, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichte $f$ und Verteilungsfunktion $F$, und sei

$$N \;=\; \min\{n \geq 1 \,|\, X_n > X_0\}\,.$$

Zeige, daß $X_N$ die Verteilungsfunktion $F + (1 - F)\log(1 - F)$ hat.

**3. ( Martingale ).** *(Aufgabe zählt doppelt).*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Folge von $\sigma$–Algebren $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$. Ein reellwertiger stochastischer Prozeß $X_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt *Martingal* bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ falls für alle $n \geq 0$ gilt:

(i) $X_n$ ist $\mathcal{F}_n$–meßbar und integrierbar.

(ii) $E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] \;=\; 0 \qquad P$–f.s.

Zeige:

a) Sind $Y_i$ $(i \geq 0)$ unabhängig und integrierbar mit $E[Y_i] = 0$, dann ist

$$S_n \;=\; Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

b) Für jede Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^1$ bilden die sukzessiven Prognosen

$$X_n \;=\; E[X|\mathcal{F}_n] \qquad \text{ein Martingal.}$$

c) Ist $(X_n)$ ein Martingal mit $X_n \in \mathcal{L}^2$, dann sind die Inkremente $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ paarweise unkorreliert. Formuliere ein schwaches Gesetz der großen Zahlen für Martingale.

**4. ( Konvergenzsätze für bedingte Erwartungen ).**
Formuliere und beweise:

a) das Lemma von Fatou für bedingte Erwartungen.

b) den Satz über dominierte Konvergenz (Satz von Lebesgue) für bedingte Erwartungen.