Wahrscheinlichkeitstheorie II Blatt 2

(5 Punkte pro Aufgabe)

1. Seien X und Y unabhängige identisch verteilte diskrete Zufallsvariablen ≥ 0 mit Erwartungswert m.

a) Wo liegt der Fehler in der folgenden Argumentation ?

$$E[X|X+Y=z] \;=\; E[X|X=z-Y] \;=\; E[z-Y] \;=\; z-m\,.$$

b) Zeige:

$$E[X|X+Y] \;=\; \frac{1}{2}\,(X+Y)\,.$$

c) Kann man auf ähnliche Weise

$$E[X|X\cdot Y] \;=\; (X\cdot Y)^{1/2} \qquad\qquad \text{zeigen ?}$$

2. (Eigenschaften der bedingten Erwartung). Seien $X, Y \geq 0$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ–Algebra. Definiere, was eine Version der bedingten Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$ ist. Zeige, daß die folgenden Aussagen für beliebige Versionen der bedingten Erwartungen gelten:

a) $E[\,E[X|\mathcal{F}]\,] \;=\; E[X] \qquad P$–f.s.

b) Ist $\sigma(X)$ unabhängig von $\mathcal{F}$, dann gilt

$$E[X|\mathcal{F}] \;=\; E[X] \qquad P\text{–f.s.}$$

c) Ist Y $\mathcal{F}$–meßbar, dann gilt

$$E[Y\cdot X|\mathcal{F}] \;=\; Y\cdot E[X|\mathcal{F}] \qquad P\text{–f.s.}$$

d) $E[\lambda X + \mu Y|\mathcal{F}] \;=\; \lambda\, E[X|\mathcal{F}] + \mu\, E[Y|\mathcal{F}] \qquad P$–f.s. für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Eine Fabrik stellt Roboter her, die mit Wahrscheinlichkeit p defekt sind. Ein Test erkennt Fehler (falls vorhanden) mit Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon$.

a) Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Roboter, der den Test passiert hat, trotzdem defekt ist, beträgt $\varepsilon p/(1-p+\varepsilon p)$.

b) Die Fabrik stellt an einem Tag n Roboter her. Sei X die Anzahl der defekten Roboter, und Y die Anzahl der als defekt erkannten. Zeige unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen:

$$E[X|Y] \;=\; Y + (n-Y)\cdot\frac{\varepsilon p}{1-p+\varepsilon p} \;=\; \frac{\varepsilon p n + (1-p)Y}{1-p+\varepsilon p}\,.$$

4. (Bedingte Varianz). Sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, und sei Y eine weitere Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathcal{A})$.

a) Wie sollte man die bedingte Varianz $\mathrm{var}\,(X|Y)$ von X gegeben Y definieren ? Zeige:

$$\mathrm{var}\,(X) \;=\; E[\,\mathrm{var}\,(X|Y)\,] \;+\; \mathrm{var}\,(\,E[X|Y]\,)\,.$$

b) Sei $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ mit i.i.d. Zufallsvariablen $X_i \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, und sei $N:\Omega\to\{0,1,2,\ldots\}$ unabhängig von $X_1,X_2,\ldots$. Zeige:

$$\begin{aligned} E[S_N] \;&=\; m\cdot E[N] \qquad\qquad \text{und} \\ \mathrm{var}\,(S_N) \;&=\; \sigma^2\cdot E[N] \;+\; m^2\cdot \mathrm{var}\,(N)\;, \end{aligned}$$

wobei $m = E[X_i]$ und $\sigma^2 = \mathrm{var}\,(X_i)$.