Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 9

1. Demonstriere anhand eines Beispiels, daß Markovketten, die nicht irreduzibel sind, mehrere invariante Verteilungen besitzen koennen.

2. The proof copy of a book is read by an infinite sequence of editors checking for mistakes. Each mistake is detected with probability p at each reading; between readings the printer corrects the detected mistakes but introduces a random number of new errors (errors may be introduced even if no mistakes were detected). Assuming as much independence as usual, and that the numbers of new errors after different readings are identically distributed, find an expression for the probability generating function of the stationary distribution of the number X_n of errors after the nth editor–printer cycle, whenever this exists. Find the stationary distribution explicitly when a printer introduces a Poisson–distributed number of errors at each stage.

3. Betrachte das folgende Modell einer Warteschlange : Zu Beginn jeder Zeiteinheit kommt genau ein neuer Kunde an. Im Zeitintervall $(n, n+1]$ können maximal Z_{n+1} Kunden bedient werden, wobei die Zufallsvariablen Z_n i.i.d. und unabhängig von der Anzahl X_0 der zu Beginn wartenden Kunden sei.

a) Gib eine Rekursionsformel für die Anzahl X_n der zur Zeit n wartenden Kunden an, und zeige, daß $(X_n)_{n\geq 0}$ eine zeithomogene Markovkette ist.

b) Wann ist die Markovkette irreduzibel ?

c) Zeige, daß die Kette rekurrent ist, wenn sie irreduzibel ist und $E[Z_1] > 1$ gilt.

4. Which of the following (when stationary) are reversible Markov chains?

a) The Markov chain X_n having transition matrix

$$p = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha + \beta > 0.$$

b) The Markov chain Y_n having transition matrix

$$p = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1.$$

c) The Markov chain $Z_n = (X_n, Y_n)$, where X_n and Y_n are independent and satisfy a) and b).

5. Sei X_n eine reversible Markovkette, und sei C eine nichtleere Teilmenge des (abzählbaren) Zustandsraums S. Wir betrachten eine Markovkette Y_n mit Übergangsmatrix

$$q(x,y) = \begin{cases} \beta p(x,y) & \text{falls } x \in C \text{ und } y \notin C \\ p(x,y) & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $x \neq y$. Dabei ist $\beta \in (0,1)$ eine Konstante, und die Diagonaleinträge $q(x,x)$ sind so gewählt, daß q eine stochastische Matrix ist.

a) Bestimme eine invariante Verteilung von Y_n, und zeige, dass die Markovkette mit dieser Startverteilung reversibel ist.

b) Was passiert für $\beta \downarrow 0$?