Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 8

1. Sei X_n eine homogene Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix p. Definiere eine Folge T_k rekursiv durch $T_0 = 0$,

$$T_{k+1} \;=\; \inf\{n > T_k \mid X_n \neq X_{T_k}\}.$$

a) Zeige, dass T_k für alle $k \geq 0$ eine Stoppzeit bzgl. der kanonischen Filtration ist.

b) Definiere einen Prozess $(Y_n)_{n\geq 0}$ durch $Y_n = X_{T_n}$, bzw. $Y_n = \Delta \notin E$, falls $T_n = \infty$. Zeige, dass Y_n wieder eine homogene Markovkette ist, und gib ihren Zustandsraum sowie ihre Übergangsmatrix an.

2. (Verteilung der ersten Rückkehrzeit). Sei (X_n, P_x) eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum S, und sei $T_x := \min\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$. Die erzeugende Funktion der Verteilung von T_x bei Start in x ist

$$G(z) \;=\; E_x\left[z^{T_x}\right] \qquad (\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1\,)\,.$$

a) Zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_x[X_n = x]\, z^n \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} E_x\left[z^{T^{(k)}}\right] \;=\; \frac{1}{1 - G(z)}$$

wobei $T^{(k)}$ die k–te Rückkehrzeit nach x ist.

b) Folgere: Für den Standard random walk auf $\mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{1-G(z)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} z^{2n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,,$$

also $G(z) = 1 - \sqrt{1-z^2}$. Insbesondere ist $E_x[T_x] = \infty$.

3. (Rekurrenz von Random walks I). Ist der einfache random walk auf dem binären Baum

rekurrent oder transient ?

4. (Rekurrenz von Random walks II). Zeige: Für den klassischen random walk in $\mathbb{Z}^3$ gilt

$$p^{2n}(x,x) \;=\; \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \binom{n}{i\;j\;k}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \;\leq\; \frac{const.}{n^{3/2}},$$

wobei $\binom{n}{i\,j\,k} := \frac{n!}{i!j!k!}$. Folgere, dass der random walk transient ist.
(Hinweis : $\sum_{i+j+k=n}\binom{n}{i\,j\,k} = 3^n$ *).*

5. (Birth and death Prozess). Sei (X_n, P_x) die kanonische Markovkette auf $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,x+1) = p_x,\; p(x,x) = r_x,\; p(x,x-1) = q_x,\; p(x,y) = 0 \text{ sonst}$$

($p_x + q_x + r_x = 1,\; q_0 = 0,\; p_x, q_x \neq 0\; \forall\, x \neq 0$).

a) Zeige:

$$h(x) \;=\; \sum_{y=0}^{x-1}\prod_{z=1}^{y}\frac{q_z}{p_z}$$

löst die Differenzengleichung

$$p_x h(x+1) + r_x h(x) + q_x h(x-1) \;=\; h(x) \qquad \forall\, x \geq 0.$$

Folgere:

$$P_x\left[X_{T_{a,b}} = a\right] \;=\; \frac{h(b)-h(x)}{h(b)-h(a)} \qquad \forall\; 0 \leq a \leq x \leq b\,,$$

wobei $T_{a,b} = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \notin (a,b)\}$.

b) Zeige, dass X_n genau dann rekurrent bzw. transient ist, wenn $h(\infty) = \infty$ bzw. $h(\infty) < \infty$ gilt.

c) Sei speziell

$$p_x \;=\; \frac{1}{2} + \frac{C}{x^\alpha},\quad q_x = \frac{1}{2} - \frac{C}{x^\alpha},\quad r_x = 0 \qquad \text{für } x \geq 1,$$

$p_0 = 1$, $q_0 = r_0 = 0$. Zeige:

$$\alpha > 1 \;\text{ oder }\; \left(\alpha = 1 \text{ und } C < \frac{1}{4}\right) \quad\Rightarrow\quad X_n \text{ rekurrent}$$

$$\alpha < 1 \;\text{ oder }\; \left(\alpha = 1 \text{ und } C > \frac{1}{4}\right) \quad\Rightarrow\quad X_n \text{ transient.}$$

Es gibt also einen „Phasenübergang" von Rekurrenz zu Transienz bei $p_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}$.