Stochastische Prozesse SoSem 2007 Blatt 6

1. (Ein Warteschlangenmodell [M/G/1–queue]). In einer Warteschlange wird in der n–ten Zeiteinheit ein Kunde bedient, und A_n neue Kunden kommen an. Dabei seien A_n, $n \in \mathbb{N}$, i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots\}$. Zeige :

a) Die Anzahl X_n der zur Zeit n in der Schlange wartenden Kunden erfüllt:

$$\begin{aligned} X_n - X_{n-1} &= I_{\{X_{n-1}=0\}} + S_n - S_{n-1}\,, \qquad \text{wobei} \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - 1)\,. \end{aligned}$$

b) Gilt $E[A_n] > 1$, dann ist 0 ein transienter Zustand von X_n.

c) Gilt $E[A_n] \le 1$, dann ist 0 rekurrent (d.h. die Warteschlange wird immer wieder abgearbeitet).

2. (Poissonapproximation des Wrightschen Evolutionsmodells). Es sei $(X_n)_{n\ge0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$, Anfangszustand $x \in \mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix

$$p(i,k) = e^{-\lambda i} \frac{(\lambda i)^k}{k!} \quad (i \ge 1, k \ge 0), \qquad p(0,0) = 1\,.$$

Wie ist der Zusammenhang mit binomialem Resampling ? Zeige:

a) Für $\lambda = 1$ ist $(X_n)_{n\ge0}$ ein Martingal bzgl. P_x mit

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0 \quad P_x\text{-f.s.},$$

und für $T_a := \min\{n \ge 0 | X_n \ge a\}$ gilt

$$P_x \left[\max_n X_n \ge a \right] = P_x[T_a < \infty] \le \frac{x}{a}.$$

b) Bestimme die Aussterbewahrscheinlichkeit $P_x[\zeta < \infty]$ für $\lambda > 1$, wobei $\zeta := \inf\{n \ge 0 | X_n = 0\}$.

3. (Star trek I). Das Kontrollsystem im Raumschiff Enterprise spielt verrückt. Das einzige, was man noch tun kann, ist eine Entfernung einzustellen. Das Raumschiff legt diese Entfernung in einer zufällig ausgewählten Richtung zurück und hält dann an. Das Ziel ist es, das Sonnensystem zu erreichen – eine Kugel vom Radius r. Zu Beginn befindet sich die Enterprise im Abstand $R_0 > r$ von der Sonne.

a) Sei R_n der Abstand von der Sonne nach n Raumsprüngen. Zeige: Für jede Strategie, bei der stets eine Distanz kleiner oder gleich dem momentanen Abstand gewählt wird, ist $1/R_n$ ein Martingal (– im Allgemeinen ist $1/R_n$ ein Supermartingal).

b) Folgere:

$$P[\,\text{Enterprise erreicht das Sonnensystem}\,] \;\leq\; \frac{r}{R_0}\,.$$

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ kann man eine Strategie wählen, bezüglich der die Wahrscheinlichkeit größer als $(r/R_0) - \varepsilon$ ist. Wie sieht so eine Strategie aus ?

4. (ABRAKADABRA). Zu jeder der Zeiten $1, 2, 3, \ldots$ tippt ein Affe einen zufälligen Buchstaben auf einer Schreibmaschine. Die Folge der Buchstaben bilde eine i.i.d. Folge von auf $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Wie lange dauert es im Mittel, bis der Affe das Wort „ABRAKADABRA" getippt hat ?

Anleitung: Ein Spieler startet zu jedem der Zeitpunkte $n = 1, 2, \ldots$ eine mehrstufige Wette der folgenden Bauart: Er setzt 1 Euro darauf, dass der n–te Buchstabe ein A ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er die erhaltenen 26 Euro darauf, dass der $(n+1)$–te Buchstabe ein B ist. Wenn er verliert, beendet er die Wette. Wenn er gewinnt, setzt er seinen Gewinn von 26^2 Euro darauf, dass der $(n+2)$–te Buchstabe ein R ist usw.

Sei T die erste Zeit, zu der der Affe die Folge „ABRAKADABRA" reproduziert hat.

a) Erkläre anschaulich, warum

$$E[T] \;=\; 26^{11} + 26^4 + 26$$

gelten sollte.

b) Beweise dies rigoros.

5. (Random signs). Sei

$$M_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k$$

mit einer Folge a_n reeller Zahlen mit $\sum a_n^2 = \infty$ und unabhängigen Zufallsvariablen ε_n mit $P[\varepsilon_n = \pm 1] = 1/2$.

a) Bestimme den Varianzprozess von M_n.

b) Für $c > 0$ sei

$$T \;:=\; \inf\{n \geq 0 \,|\, |M_n| \geq c\,\}\,.$$

Wende den Stoppsatz auf den Martingalteil in der Doobzerlegung von M_n^2 an. Folgere, dass $P[T = \infty] = 0$ gilt.

c) Zeige, dass M_n P–fast sicher unbeschränkt oszilliert.